

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

**РЕКУРРЕНТНОЕ УРАВНИВАНИЕ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

В [3] рассмотрен рекуррентный коррелатный способ уравнивания, суть которого сводится к тому, что в геодезической сети по необходимым измерениям вычисляется вектор X_0 порядка m предварительных координат пунктов и строится соответствующая ему матрица весовых коэффициентов Q_0 . Способ построения Q_0 указан в [2, 3], причем он рассмотрен с учетом зависимости ошибок координат исходных пунктов. Справедливость этого вывода подтверждена Ю. И. Маркузе [7] на основе параметрического способа уравнивания.

Все остальные измерения в сети, число которых равно r , избыточные и процесс уравнивания выполняется по формулам:

$$a_i \delta X_i - v_i + w_i = 0; \quad (1)$$

$$w_i = \tilde{l}_i - l_i; \quad (2)$$

$$R_i = p_i^{-1} + a_i Q_{i-1} a_i^T; \quad (3)$$

$$k_i = -R_i^{-1} w_i; \quad (4)$$

$$\delta X_i = Q_{i-1} a_i^T k_i; \quad (5)$$

$$X_i = X_{i-1} + \delta X_i; \quad (6)$$

$$Q_i = Q_{i-1} - R_i^{-1} (a_i Q_{i-1})^T (a_i Q_{i-1}), \quad (7)$$

где $i=1, 2, \dots, r$. На последнем шаге получают вектор уравниваемых координат $\bar{X}=X_r$ и соответствующую ему матрицу весовых коэффициентов $Q_{\bar{X}}=Q_r$.

В формулах (1)–(7) a_i — строка коэффициентов i -го условного уравнения, тождественно совпадающая со строкой коэффициентов обычного уравнения поправок параметрического способа уравнивания; δX_i — вектор поправок в координаты за решение i -го уравнения; v_i и p_i — поправка и вес измерения l_i ; $\tilde{l}_i$ — вычисленное по вектору координат X_{i-1} значение избыточно измеряемой величины.

Рекуррентная формула (7) в настоящее время хорошо известна в геодезической литературе. Ранее ее использовали для оптимального проектирования Ю. М. Нейман [10] и З. П. Тамутис [11]. Алгоритмы уравнивания геодезических сетей, основанные на формуле (7) и параметрическом способе, стали широко разрабатываться после предложения Ю. И. Маркузе [8] использовать в качестве начальной матрицы

$$Q_0 = 10^q E, \quad (8)$$

где E — единичная матрица, а q — максимальное число, не превышающее числа разрядов в разрядной сетке ЭВМ. Тогда после преобразования по (7) для всех n измерений, а не только избыточных, на последнем шаге получаем матрицу Q_n .

В случае уравнивания несвободной сети матрица $Q_n \approx N^{-1} = Q_{\bar{X}}$. Для свободной сети матрица Q_n преобразуется в псевдообратную

$$N^+ = Q_{\bar{X}} \approx Q_{n+d} - B^T (B B^T B B^T)^{-1} B, \quad (9)$$

где B — известная матрица ограничений [4, 6] порядка $d \times m$; d — дефект сети, равный $d = m - \rho$; $\rho = \text{rang } N$; $N = A^T P A$ — матрица коэффициентов системы нормальных уравнений параметрического способа уравнивания. Формирование матрицы $Q_{n+d} = (Q_n^{-1} + B^T B)^{-1}$ также можно выполнить [9] по формуле (7) последовательным введением строк b_j матрицы B , $j=1, 2, \dots, d$. В случае необходимости матрицу B следует привести к центру тяжести сети и, по предложению Ю. И. Маркузе [6], соответствующую

щим образом нормировать. Окончательное решение находим по формуле

$$\bar{X} \sim X_0 - N^+ L, \quad (10)$$

где $L = A^T P l$; l — вектор свободных членов уравнений поправок.

Коррелятный способ, описываемый формулами (1)–(7), работает и в этом случае, так как вектор предварительных координат X_0 с матрицей Q_0 , определяемой формулой (8), можно считать как

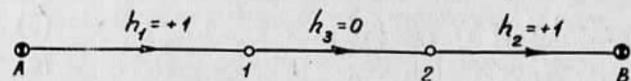


Рис. 1. Схема нивелирного хода.

измеренным с весами 10^{-q} , так и вектором исходных данных с матрицей весовых коэффициентов $Q_0 = 10^q E$. После работы формул (1)–(7) при $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. по всем измерениям, а не только избыточным, получим уравненный вектор $\bar{X} \approx X_n$ и матрицу $Q\bar{X} \approx Q_n$. Для свободной сети следует выполнить дополнительное преобразование матрицы Q_n в псевдообратную по (9).

Отметим, что применение рекуррентного коррелятного уравнивания по формулам (1)–(8) предпочтительнее параметрического (7)–(10), так как при плохой обусловленности матрицы N решение (10) можно получить с большими ошибками, несмотря на то, что N^+ вычислена с заданной точностью надежно. В этом нетрудно убедиться, рассматривая численный пример уравнивания нивелирного хода (рис. 1), в котором веса измеренных превышений, показанных на схеме, равны $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 1000$. Отметим исходных пунктов $H_A = H_B = 0$. Для удобства, не нарушая общности, все размерности здесь и в дальнейшем опущены.

Так как коэффициенты и свободные члены уравнений поправок линейны относительно неизвестных, вектор предварительных высот определяемых пунктов можно положить любым, например, $H_0^T = (0; 8)$. Тогда, выполняя вычисления с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, примем $Q_0 = 10^2 E$, и согласно формулам (7)–(10) имеем

$$Q_{\bar{H}} = Q_3 = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -8001 \\ 8009 \end{pmatrix},$$

$\delta H^T = (-4; -4)$, $H^T = (-4; +4)$, т. е. полученный уравненный вектор $\bar{H}$ явно противоречит здравому смыслу.

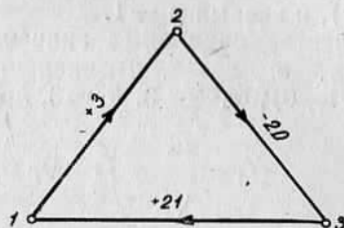
При коррелятном уравнивании (1)–(8), полагая также $\varepsilon = 10^{-2}$, $H_0^T = (0; 8)$ и $Q_0 = 10^2 E$, получаем ту же матрицу $Q_{\bar{H}} = Q_3$ и уравненный вектор $\bar{H}^T = H_3^T = (0; 0)$, что вполне согласуется с результатами измерений.

Заметим, однако, что предложение полагать $Q_0 = 10^q E$, где $q \gg 0$, нельзя считать оптимальным, особенно при уравнивании свободных сетей, так как это вынуждает на первых шагах до набора необходимых измерений по (7) работать с очень плохо обусловленными матрицами, а это требует повышенной точности при вычислении и хранении элементов матриц Q_i . Не зря, напри-

мер, в [9, с. 19] матрица Q_8 выписана с точностью до девяти значащих цифр, в то время как $Q_0 = 10^5 E$.

О плохой обусловленности свидетельствует уже первый шаг работы алгоритма, так как, например, $Q_1^{-1} = Q_0^{-1} + a_1^T p_1 a_1$, где $a_1^T p_1 a_1$ — матрица ранга 1 с одним ненулевым собственным значением $\lambda_1(a_1^T p_1 a_1) = p_1 a_1 a_1^T$. Поскольку Q_0 выбирается диагональ-

Рис. 2. Схема свободной нивелирной сети.



ной, то максимальное собственное значение $\lambda_1(Q_1^{-1}) = 10^{-q} + p_1 a_1 a_1^T$, а минимальное $\lambda_m(Q_1^{-1}) = 10^{-q}$. Тогда спектральное число обусловленности

$$k(Q_1) = k(Q_1^{-1}) = \frac{10^{-q} + p_1 a_1 a_1^T}{10^{-q}} = 1 + 10^q p_1 a_1 a_1^T,$$

т. е. при большом q число $k(Q_1)$ слишком велико.

Избавиться от плохой обусловленности можно, приняв $Q_0 = p_0^{-1} E$, где $p_0 \approx p_1 a_1 a_1^T$, но в этом случае преобразования по (1)–(7) следует продолжить для исключения фиктивных измерений, входящих в вектор $X_0^T = (X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0m})$, вводя для них отрицательные веса $-p_0$. Строкой коэффициентов a_i здесь будет строка a_{0i} , в которой на месте исключаемого фиктивного измерения X_{0i} стоит 1, а остальные коэффициенты — нули. Исключение вектора X_0 следует выполнить после получения матрицы $Q_{n+d} = (Q_n^{-1} + B^T B)^{-1}$. Подобный путь исключения фиктивных измерений с целью получения N^+ использован в [7], а для редукции N^+ к требуемой g -обратной матрице — в работе [4].

Таким образом, рекуррентный алгоритм уравнивания, основанный на коррелятном способе, можно свести к следующему.

1. Задание вектора X_0 и матрицы $Q_0 = p_0^{-1} E$.
2. Учет всех измерений по (1)–(7). В результате получим вектор X_n и матрицу $Q_n = (Q_0^{-1} + N)^{-1}$.
3. Вычисление по (7) матрицы $Q_{n+d} = (Q_0^{-1} + N + B^T B)^{-1}$.
4. Исключение по (1)–(7) вектора X_0 и матрицы Q_0 . Для этого вектор «измерений» X_0 вводится с весовой матрицей $Q_0^{-1} = -p_0 E$. На выходе получим вектор уравненных неизвестных $\bar{X}$ и матрицу $Q_{n+d+m} = (N + B^T B)^{-1} = \bar{Q}$.
5. Вычисление матрицы

$$Q_{\bar{X}} = N^+ = \bar{Q} - B^T (B B^T B B^T)^{-1} B, \quad (11)$$

необходимой для оценки точности сети.

Пункты 3 и 5 изложенного алгоритма следует выполнять лишь при уравнивании свободных сетей с неполным рангом (теоретическим) матрицы весовых коэффициентов необходимых неизвестных.

Работу изложенного алгоритма проиллюстрируем на примере уравнивания свободной нивелирной сети (рис. 2) с равноточно измеренными превышениями, выписанными на схеме (размерности опущены), и весами $p_i=1$.

В качестве начальных значений положим: $H_0^T = (0 \ 0 \ 0)$; $Q_0 = E$, т. е. $p_0=1$. Вычисления по (1)–(7) дают $a_1 Q_0 = (-1 \ 1 \ 0)$, $w_1 = -3$, $R_1 = 3$, $k_1 = 1$,

$$H_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 0,67 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_2 Q_1 = (-0,33 \ -0,67 \ 1), \quad w_2 = 19, \quad R_2 = 2,67, \quad k_2 = -7,116,$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1,348 \\ 5,768 \\ -7,116 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,25 & 0,12 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 \\ 0,12 & 0,25 & 0,63 \end{pmatrix},$$

$$a_3 Q_2 = (0,51 \ 0 \ -0,51), \quad w_3 = -12,54, \quad R_3 = 2,02, \quad k_3 = 6,208,$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 4,514 \\ 5,768 \\ -10,280 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,50 \end{pmatrix}.$$

Матрица ограничений для свободной нивелирной сети $B = (1 \ 1 \ 1)$, $BQ_3 = (1 \ 1 \ 1)$, $R = 1 + BQ_3 B^T = 4$,

$$Q_4 = Q_3 - R^{-1} (BQ_3)^T (BQ_3) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,25 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Сделаем вывод вектора $H_0^T = (H_{01}, H_{02}, H_{03}) = (0 \ 0 \ 0)$ и матрицы $Q_0 = E$. Матрица уравнений поправок A_0 вектора «измерений» H_0 единичная. Тогда

$$a_{01} Q_4 = (0,25 \ 0 \ 0), \quad w_{01} = H_{31} - H_{01} = 4,514,$$

$$R_{01} = -p_0^{-1} + a_{01} Q_4 a_{01}^T = -0,75, \quad k_{01} = 6,019,$$

$$H_5 = \begin{pmatrix} 6,019 \\ 5,768 \\ -10,280 \end{pmatrix}, \quad Q_5 = \begin{pmatrix} 0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Аналогично выводим отметки H_{02} и H_{03} :

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 6,019 \\ 7,691 \\ -13,710 \end{pmatrix}, \quad Q_7 = \begin{pmatrix} 0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{pmatrix} = \bar{Q}.$$

Окончательную матрицу весовых коэффициентов уравненных отметок пунктов получаем по формуле (11):

$$Q_{\bar{H}} = \begin{pmatrix} 0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 & -0,11 & -0,11 \\ -0,11 & 0,22 & -0,11 \\ -0,11 & -0,11 & 0,22 \end{pmatrix}.$$

Данный алгоритм без существенного увеличения объема вычислений позволяет получить и решение обычным параметрическим способом [8], так как здесь достаточно вычислить только вектор свободных членов $L^T = (18 \ -23 \ +41)$ и применить формулу (10). Тогда $\bar{H}^T = (5,94 \ 7,59 \ -13,53)$. Точное значение вектора $\bar{H}$, полученное с удержанием семи значащих цифр, составляет $\bar{H}^T = (6,000 \ 000; \ 7,666 \ 667; \ -13,666 \ 67)$. Сравнение полученных результатов показывает, что изложенный коррелятный способ при ограниченной точности вычисления и хранения матриц Q_i дает результаты более близкие к истинным, чем параметрический. Промежуточные результаты счета и хранение отдельных векторов и скаляров, как это нетрудно предусмотреть на современных ЭВМ, выполнены с удвоенной точностью. При уравнивании больших сетей проблемой, как известно, является именно хранение и вычисление матрицы $Q_{\bar{H}}$ и (или) N .

Особо отметим, что в рассмотренных примерах вычисление и хранение матрицы Q_i ведется с точностью лишь $\varepsilon = 10^{-2}$ с той целью, чтобы упростить вычисления и показать, к каким пагубным последствиям может привести игнорирование влияния ошибок округлений в неустойчивых к ним алгоритмах уравнивания. В частности, если в нивелирной сети на рис. 2 положить $Q_0 = 10^2 E$ и использовать алгоритм (7)–(10), то при заданных ограничениях на точность вычислений не будет удовлетворительно получен не только вектор $\bar{H}$, но и матрица $Q_{\bar{H}}$.

Объем вычислений, сложность программирования и требуемые запросы к памяти ЭВМ в рассмотренных здесь алгоритмах практически одинаковы. Изложенный коррелятный способ наиболее целесообразно использовать с целью сокращения объема вычислений в сочетании с идеей последовательного уравнивания [5], когда к уже уравненному участку сети присоединяется по одному новому определяемому пункту [1, 7].

В заключение подчеркнем, что полученный в [3] рекуррентный алгоритм (1)–(7), основанный на коррелятном уравнивании и теории уравнивания зависимых измерений [5], с небольшими видоизменениями по сути представляет собой знаменитый фильтр Калмана, который, благодаря целой серии выполненных и опубликованных В. К. Панкрушиным и его учениками работ, посвященных исследованию современных движений земной коры и объектов искусственного происхождения, в настоящее время хорошо известен в геодезической литературе.

1. Герасименко М. Д. К вопросу о последовательном уравнивании геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979. № 4. С. 19–23.
2. Герасименко М. Д. Метод непосредственного уравнивания координат геоде-

зических построений способом условий и учет ошибок зависимых исходных данных. Владивосток, 1975. С. 8. Рукопись деп. ВИНТИ № 3707-75 деп.

3. Герасименко М. Д. Многогрупповой коррелятный способ для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1977. № 5. С. 57—60.

4. Герасименко М. Д., Шароглазова Г. А. Определение современных движений земной коры из повторных измерений // Геодезия и картография. 1985. № 7. С. 25—29.

5. Гордеев Ю. А. О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1960. № 2. С. 19—40.

6. Маркузе Ю. И. Взаимосвязь процедур уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1984. № 3. С. 3—14.

7. Маркузе Ю. И. Способы формирования исходной матрицы при рекуррентном уравнивании // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 5. С. 18—27.

8. Маркузе Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982.

9. Маркузе Ю. И., Хоанг Нгок Ха. Два способа получения псевдообратной матрицы при уравнивании свободных геодезических сетей с применением рекуррентной формулы // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 1. С. 14—23.

10. Нейман Ю. М. Алгоритм проектирования геодезических построений на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1966. № 6. С. 33—45.

11. Тамутис З. П. Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М., 1979.