

СГУЩЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ОСНОВАНИЯ ОБРАТНЫМИ ГИРОКОПИЧЕСКИМИ ЗАСЕЧКАМИ

Для сгущения геодезического обоснования широко применяют аналитические сети, координаты пунктов которых определяют в основном методом засечек. Применение засечек сокращает объем полевых и камеральных работ, позволяет значительно уменьшить количество наружных знаков. Поэтому использование этого метода в различных отраслях геодезического производства вполне

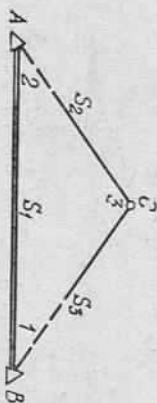


Схема засечки.

оправдано. Тем более оправдано использование для этих целей гиротеодолитов, так как при этом уменьшается число необходимых исходных пунктов.

В данной работе приведены исследования практической точности обратных гиротеодолитных засечек, измерения в которых выполнены гиротеодолитами типа Ги-В.

Измерив на определяемом пункте С дирекционные углы α_{CA} , α_{CB} и зная координаты исходных пунктов А, В в сети (см. рисунок), легко определить положение пункта С по известным формам тангенсов дирекционных углов:

$$\begin{aligned} x - x_A &= \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CB}}{\operatorname{tg} \alpha_{CA} - \operatorname{tg} \alpha_{CB}}, \\ y - y_A &= \frac{(x_B - x_A) - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \alpha_{CB}}{\operatorname{ctg} \alpha_{CA} - \operatorname{ctg} \alpha_{CB}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для контроля служат формулы

$$\begin{aligned} x - x_B &= \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CA}}{\operatorname{tg} \alpha_{CA} - \operatorname{tg} \alpha_{CB}}, \\ y - y_B &= \frac{(x_B - x_A) - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \alpha_{CA}}{\operatorname{ctg} \alpha_{CA} - \operatorname{ctg} \alpha_{CB}}. \end{aligned} \quad (2)$$

или

$$y - y_A = (x - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CA}, \quad y - y_B = (x - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CB}. \quad (3)$$

Составим весовые функции для оценки точности положения пункта С, для чего абсциссу и ординату этой точки выразим в виде

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + S_2 \cos \alpha_{AC} = x_A - S_2 \cos \alpha_{CA}, \\ y_C &= y_A + S_2 \sin \alpha_{AC} = y_A - S_2 \sin \alpha_{CA}. \end{aligned} \quad (4)$$

Считая координаты исходного пункта безошибочными, после дифференцирования последних формул (4) по переменным α_{CA} и S_2 будем иметь

$$\begin{aligned} f_1 &= S_2 \sin \alpha_{CA} \frac{(\alpha_{CA})''}{\rho''} - \cos \alpha_{CA} (S_2)', \\ f_2 &= -S_2 \cos \alpha_{CA} \frac{(\alpha_{CA})''}{\rho''} - \sin \alpha_{CA} (S_2)'. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы выразить поправку S_2 через поправки измеренных дирекционных углов, используем формулу

$$S_2 = S \frac{\sin 1}{\sin 3}. \quad (6)$$

Считая исходную сторону безошибочной, найдем частные производные от S_2 по переменным углам 1 и 3. С учетом того, что $1 = \alpha_{CB} - \alpha_{AB}$ и $3 = \alpha_{CA} - \alpha_{CB}$, имеем

$$(S_2)' = \frac{S_2}{\rho''} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3) (\alpha_{CB})' - \frac{S_2}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 (\alpha_{CA})'. \quad (7)$$

Подставив S_2 из (7) в (5), выразим функции f_1 и f_2 через поправки в измеренные величины

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} + \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 \right) (\alpha_{CA})' - \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3) (\alpha_{CB})', \\ f_2 &= \left(\frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 - \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \right) (\alpha_{CA})' - \frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3) (\alpha_{CB})'. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя теорию строгого уравнивания коррелятным методом, получаем обратные веса уравненных значений координат пункта С по известной формуле

$$\frac{1}{P_{11}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \dots \quad (9)$$

Но так как в данном построении нет избыточных измерений, то $1/P_{11} = [ff]$.

Подставив в (10) квадратичные коэффициенты, найдем обратные веса абсциссы и ординаты определяемого пункта

$$\frac{1}{P_{11}} = \left(\frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} + \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 + \right)^2 \frac{\Delta x_{CA}^2}{\rho''^2} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3)^2,$$

$$\frac{1}{P_i} = \left(\frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 - \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \right)^2 + \frac{\Delta y_{CA}^2}{\rho''^2} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3)^2. \quad (11)$$

Обратный вес абсолютного положения пункта C равен

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P_i} + \frac{1}{P_i} = \frac{S_i^2}{\rho''^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 1 + 2 \operatorname{ctg}^2 3 + 2 \operatorname{ctg} 1 \operatorname{ctg} 3). \quad (12)$$

С учетом (6) после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{P_i} = \frac{S_i^2}{\rho''^2} \cdot \frac{\sin^2 1 + \sin^2 \{1+3\}}{\sin^4 3}.$$

Но так как $\{1+3\} = 180^\circ - 2$, то

$$\frac{1}{P_i} = \frac{S_i^2}{\rho''^2} \cdot \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2}{\sin^4 3}.$$

а погрешность абсолютного положения пункта C

$$M_C = m_a \sqrt{\frac{1}{P_i}} = \frac{m_a S_i}{\rho''} \frac{\sqrt{\sin^2 1 + \sin^2 2}}{\sin^2 3}. \quad (13)$$

Здесь m_a — погрешность определения дирекционного угла.

Выражение (13) аналогично известной формуле погрешности положения пункта в прямой угловой засечке [2]. Детальный анализ этой формулы показал, что в равнобедренной засечке абсолютная погрешность положения определяемого пункта минимальна при угле засечки 90° [2].

Для исследования реальной точности обратной однократной гирскопической засечки в сети триангуляции 3 класса наблюдались 42 засечки. Гирскопические азимуты определялись с точностью $m_a = 5''$. По малости поправок за приведение дирекционных углов на плоскость они не учитывались.

Характеристики сетей, а также результаты вычислений приведены в таблице. Знаком «*» в ней обозначены сети, в которых исходная сторона S_1 длиннее стороны S_2 до определяемого пункта. Независки определены по разностям координат, вычисленным по (1), полученным в триангуляции 3 класса и принятым за безошибочные. Погрешности $M_{предв}$ вычисляли по формуле (13) при $m_a = 5''$.

Расхождение между $f_{абс.}$ и $M_{предв}$ показывают, что погрешности ориентирования в сетях меньше $5''$. Из значений $f_{абс.}$ следует, что тригодополиты типа Ги-В обеспечивают привязку пунктов обратной однократной засечкой с точностью, соответствующей триангуляции 1 разряда. При углах засечки от 25 до 150° и расстояниях до 5 км практически во всех сетях обеспечивается требуемая точность.

Сравнивая значения $M_{предв}$, полученные для засечек с разными геометрическими характеристиками, можно утверждать, что отклонение фигуры от равнобедренного треугольника мало влияет

Характеристики и результаты обработки реальных гирскопических засечек

Показатели	Параметры засечек													
Угол при определяемом пункте, ...°	7	9	19	26	26	28	28	33	34	36	37	37	38	39
Меньший из углов при исх. стороне, ...°	9	7	26	19	54	36	39	61	26	28	33	39	66	37
S_1 , км	2,9	4,0	2,2	2,9	2,2	3,6	3,5	2,2	2,7	4,4	3,5	2,7	2,2	2,9
S_2 , км	6,8	6,8	4,7	4,7	4,3	6,8	6,8	4,0	4,3	6,8	4,0	4,4	3,4	4,4
S_3 , км	4,0	2,9	2,9	2,2	2,7	4,4	4,7	3,5	2,2	3,5	2,2	2,9	3,2	2,7
$S_2 : S_1$	2,34	1,70	2,14	1,62	1,95	1,89	1,94	1,82	1,59	1,55	1,14	1,63	1,55	1,52
$S_2 : S_3$	1,70	2,34	1,62	2,14	1,59	1,55	1,45	1,14	1,95	1,94	1,82	1,52	1,06	1,63
$f_{абс.}$, см	140,5	78,1	38,2	3,5	5,9	26,6	25,3	16,4	3,6	52,5	8,7	17,8	5,5	5,2
$M_{предв}$ при $m_a = 5''$, см	166,7	112,9	40,8	28,7	28,2	42,0	42,4	23,7	21,0	32,0	12,6	21,5	18,4	20,0
Угол при определяемом пункте, ...°	39	40	42	47	52	53	55	56	59	59	60	65	66	66
Меньший из углов при исх. стороне, ...°	28	47	60	40	53	52	59	59	55	56	42	56	55	38
S_1 , км	4,7	3,0	2,7	3,4	3,5	3,6	2,9	4,3	3,0	4,4	3,6	4,7	3,2	3,2
S_2 , км	6,8	4,7	4,0	4,7	4,3	4,3	3,2	4,7	3,2	4,7	4,0	4,0	3,0	3,4
S_3 , км	3,5	3,5	3,5	3,0	3,5	3,5	3,0	4,4	2,9	4,3	2,7	4,3	2,9	2,2
$S_2 : S_1$	1,45	1,57	1,48	1,38	1,23	1,19	1,10	1,09	1,07	1,07	1,11	0,94*	0,94*	1,06
$S_2 : S_3$	1,94	1,34	1,14	1,57	1,23	1,23	1,07	1,07	1,10	1,09	1,48	1,02	1,03	1,55
$f_{абс.}$, см	28,3	2,9	17,3	24,0	5,9	3,4	4,7	24,6	8,0	4,1	11,4	6,1	18,6	3,6
$M_{предв}$ при $m_a = 5''$, см	29,2	21,9	18,0	18,5	17,1	16,7	12,9	18,9	12,2	17,8	13,6	16,5	11,1	10,7
Угол при определяемом пункте, ...°	75	75	78	87	94	99	102	104	112	117	121	135	152	164
Меньший из углов при исх. стороне, ...°	52	26	42	61	40	35	30	39	28	28	26	19	14	7
S_1 , км	4,3	6,7	4,0	4,0	4,7	5,9	5,9	4,4	6,8	6,8	4,3	4,7	6,7	6,8
S_2 , км	3,5	6,8	3,5	3,5	3,4	4,3	4,4	2,9	4,7	4,4	2,7	2,9	3,5	4,0
S_3 , км	3,5	3,0	2,7	2,2	3,0	3,4	3,0	2,7	3,5	3,5	2,2	2,2	3,4	2,9
$S_2 : S_1$	0,81*	1,01	0,88*	0,88*	0,72*	0,73*	0,75*	0,66*	0,69*	0,65*	0,63*	0,62*	0,53*	0,59*
$S_2 : S_3$	1,00	2,27	1,30	1,59	1,13	1,26	1,47	1,07	1,34	1,26	1,23	1,32	1,03	1,38
$f_{абс.}$, см	16,9	27,9	5,8	3,5	6,4	3,8	28,1	4,2	3,9	7,0	2,5	7,1	4,5	4,1
$M_{предв}$ при $m_a = 5''$, см	12,5	18,7	11,1	10,0	11,0	13,4	13,3	10,0	15,3	15,4	9,8	12,4	25,4	44,0

на точность определяемого пункта. Так, при равных углах засечки, но разных длинах сторон S_1 и S_2 значения $M_{\text{пред}}$ равны (см. табл., графы 32, 34). Точность также мало зависит от угла засечки в интервале $30 \dots 150^\circ$. Так, при равенстве других параметров, но разных углах засечки, значения $M_{\text{пред}}$ практически равны между собой (см. табл., графы 12, 34).

Анализ результатов, приведенных в таблице, показывает, что точность положения пункта существенно зависит от длины наибольшей стороны, а также от соотношения длин этой стороны и исходной. Так, при равных углах засечки, но существенном различии соотношений $S_2 : S_1$, величины $M_{\text{пред}}$ значительно разнятся (см. табл., графы 12, 13).

Если наибольшая сторона превышает 4 км, то предвычисленная точность положения определяемого пункта практически при любых углах засечки не удовлетворяет требованиям триангуляции I разряда (см. табл., графы 24, 26, 33). По мере приближения определяемого пункта к исходным, точность его существенно повышается. В сетях, обозначенных знаком «*», погрешности положения пунктов не превышают допусков, установленных для сетей триангуляции I разряда [1].

Таким образом, для привязки пунктов обратной однократной триангометрической засечкой с точностью, удовлетворяющей триангуляции I разряда, необходимо выполнение следующих условий:

- предельная ошибка дирекционного угла $\leq 5''$;
 - наименьший угол при определяемом пункте 30° ;
 - максимальная длина стороны до исходного пункта 4 км.
- Отношение наибольшей стороны до исходного пункта к исходной стороне $\leq 1,2$.

1. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. — М.: Недра, 1973. — 176 с. 2. Кузьмин Б. С., Литвинов Б. А. Руководство по геодезии: (Общие сведения и триангуляция). — М.: ВИА, 1961. — 722 с.

Статья поступила в редколлегию 20. 05. 85

УДК 528.44

Р. Г. ПИЛИПЮК, Е. Ю. ИЛЬКИВ
**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
 РЕПЕРОВ ВЫСОТНОЙ ОСНОВЫ
 МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ**

Обеспечение надежной эксплуатации сложных инженерных сооружений невозможно без достоверного установления их деформационных характеристик. Поэтому проблема надежного определения устойчивости реперов, составляющих высотную основу для исследований деформаций, несомненно актуальна.

В настоящее время геодезическая практика располагает значительным числом методов исследований, однако, как показано в [1, 3], достоверные результаты исследований достигаются лишь в частных случаях. Причиной является вырожденность матрицы нормальных уравнений, что приводит к множеству решений, удовлетворяющих исходную систему уравнений. Наиболее целесообразно решить эту проблему путем использования псевдообратных матриц по методике, предложенной в [2]. Решение, полученное по той методике.

$$H^0 = (A^T P A) + A^T P h, \quad (1)$$

обладает минимальной дисперсией и, по мнению автора [2], позволяет установить стабильность реперов.

В (1) H^0 — вектор искомым вертикальных смещений реперов; h — вектор разностей превышений, измеренных в исследуемых циклах; P — матрица весов разностей измеренных превышений; A — матрица коэффициентов уравнений поправок.

Оценку устойчивости выполняют по критерию

$$|H^0| < m_{\text{пред}} = 2\mu \sqrt{b_{ii}}, \quad (2)$$

где b_{ii} — диагональные элементы корреляционной матрицы вектора H^0 i -го репера; μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Анализ (1) показывает, что смещения H^0 определяются относительно горизонтальной плоскости отсчета, соответствующей псевдообратной матрице $B^+ = (A^T P A)$ и расположенной на уровне средней отметки всех реперов сети. Таким образом, пространственное положение плоскости отсчета зависит от осадок каждого репера сети. Если допустить, что сеть состоит в основном из стабильных реперов, а смещению подвержены только отдельные из них, то смещения всех реперов H^0 , вычисленные от плоскости отсчета, определяемой псевдообратной матрицей B^+ , будут искажены. Это положение является существенным недостатком данной методики и может привести к ошибочным выводам при исследовании стабильности реперов и, соответственно, к неверному определению деформаций инженерных сооружений.

Для подтверждения сказанного выше рассмотрим нивелирную сеть, представленную на рисунке.

Разности h превышений, измеренных в двух смежных циклах наблюдений, приведены в табл. 1, причем через h_0 обозначены исходные значения.

Зададим реперам $Rp3$ и $Rp5$ смещение $s_3 = s_5 = +2$ мм.

