

# СГУЩЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ ОБРАТНЫМИ ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ ЗАСЕЧКАМИ

Для сгущения геодезического обоснования широко применяют аналитические сети, координаты пунктов которых определяют в основном методом засечек. Применение засечек сокращает объемы полевых и камеральных работ, позволяет значительно уменьшить количество наружных знаков. Поэтому использование этого метода в различных отраслях геодезического производства вполне

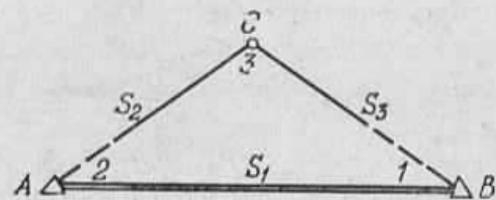


Схема засечки.

оправданно. Тем более оправданно использование для этих целей гироэодолитов, так как при этом уменьшается число необходимых исходных пунктов.

В данной работе приведены исследования практической точности обратных гироскопических засечек, измерения в которых выполнены гироэодолитами типа Ги-Б.

Измерив на определяемом пункте  $C$  дирекционные углы  $\alpha_{CA}$ ,  $\alpha_{CB}$  и зная координаты исходных пунктов  $A$ ,  $B$  в сети (см. рисунок), легко определить положение пункта  $C$  по известным формулам тангенсов дирекционных углов:

$$\begin{aligned} x - x_A &= \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CB}}{\operatorname{tg} \alpha_{CA} - \operatorname{tg} \alpha_{CB}}, \\ y - y_A &= \frac{(x_B - x_A) - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \alpha_{CB}}{\operatorname{ctg} \alpha_{CA} - \operatorname{ctg} \alpha_{CB}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для контроля служат формулы

$$\begin{aligned} x - x_B &= \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CA}}{\operatorname{tg} \alpha_{CB} - \operatorname{tg} \alpha_{CA}}, \\ y - y_B &= \frac{(x_B - x_A) - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \alpha_{CA}}{\operatorname{ctg} \alpha_{CB} - \operatorname{ctg} \alpha_{CA}}. \end{aligned} \quad (2)$$

или

$$y - y_A = (x - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CA}, \quad y - y_B = (x - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{CB}. \quad (3)$$

Составим весовые функции для оценки точности положения пункта  $C$ , для чего абсциссу и ординату этой точки выразим в виде

$$\begin{aligned}x_C &= x_A + S_2 \cos \alpha_{AC} = x_A - S_2 \cos \alpha_{CA}, \\y_C &= y_A + S_2 \sin \alpha_{AC} = y_A - S_2 \sin \alpha_{CA}.\end{aligned}\quad (4)$$

Считая координаты исходного пункта безошибочными, после дифференцирования последних формул (4) по переменным  $\alpha_{CA}$  и  $S_2$  будем иметь

$$\begin{aligned}f_1 &= S_2 \sin \alpha_{CA} \frac{(\alpha_{CA})''}{\rho''} - \cos \alpha_{CA} (S_2), \\f_2 &= -S_2 \cos \alpha_{CA} \frac{(\alpha_{CA})''}{\rho''} - \sin \alpha_{CA} (S_2).\end{aligned}\quad (5)$$

Чтобы выразить поправку  $S_2$  через поправки измеренных дирекционных углов, используем формулу

$$S_2 = S \frac{\sin 1}{\sin 3}. \quad (6)$$

Считая исходную сторону безошибочной, найдем частные производные от  $S_2$  по переменным углам  $1$  и  $3$ . С учетом того, что  $1 = \alpha_{CB} - \alpha_{AB}$  и  $3 = \alpha_{CA} - \alpha_{CB}$ , имеем

$$(S_2) = \frac{S_2}{\rho''} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3) (\alpha_{CB}) - \frac{S_2}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 (\alpha_{CA}). \quad (7)$$

Подставив  $S_2$  из (7) в (5), выразим функции  $f_1$  и  $f_2$  через поправки в измеренные величины

$$\begin{aligned}f_1 &= \left( \frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} + \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 \right) (\alpha_{CA}) - \frac{\Delta x_{CA}}{\rho'} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3) (\alpha_{CB}), \\f_2 &= \left( \frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 - \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \right) (\alpha_{CA}) - \frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3) (\alpha_{CB}).\end{aligned}\quad (8)$$

Используя теорию строгого уравнивания коррелатным методом, получаем обратные веса уравненных значений координат пункта  $C$  по известной формуле

$$\frac{1}{P_{f_i}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \dots \quad (9)$$

Но так как в данном построении нет избыточных измерений, то

$$1/P_{f_i} = [ff]. \quad (10)$$

Подставив в (10) квадратичные коэффициенты, найдем обратные веса абсциссы и ординаты определяемого пункта

$$\frac{1}{P_{f_i}} = \left( \frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} + \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 + \right)^2 \frac{\Delta x_{CA}^2}{\rho'^2} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3)^2,$$

$$\frac{1}{P_{f_1}} = \left( \frac{\Delta y_{CA}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3 - \frac{\Delta x_{CA}}{\rho''} \right)^2 + \frac{\Delta y_{CA}^2}{\rho''^2} (\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 3)^2. \quad (11)$$

Обратный вес абсолютного положения пункта  $C$  равен

$$\frac{1}{P_f} = \frac{1}{P_{f_1}} + \frac{1}{P_{f_2}} = \frac{S_2^2}{\rho''^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 1 + 2 \operatorname{ctg}^2 3 + 2 \operatorname{ctg} 1 \operatorname{ctg} 3). \quad (12)$$

С учетом (6) после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{P_f} = \frac{S_1^2}{\rho''^2} \cdot \frac{\sin^2 1 + \sin^2 \{1+3\}}{\sin^4 3}.$$

Но так как  $\{1+3\} = 180^\circ - 2$ , то

$$\frac{1}{P_f} = \frac{S_1^2}{\rho''^2} \cdot \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2}{\sin^4 3},$$

а погрешность абсолютного положения пункта  $C$

$$M_C = m_\alpha \sqrt{\frac{1}{P_f}} = \frac{m_\alpha S_1}{\rho''} \frac{\sqrt{\sin^2 1 + \sin^2 2}}{\sin^2 3}. \quad (13)$$

Здесь  $m_\alpha$  — погрешность определения дирекционного угла.

Выражение (13) аналогично известной формуле погрешности положения пункта в прямой угловой засечке [2]. Детальный анализ этой формулы показал, что в равнобедренной засечке абсолютная погрешность положения определяемого пункта минимальна при угле засечки  $90^\circ$  [2].

Для исследования реальной точности обратной однократной гирокопической засечки в сети триангуляции 3 класса наблюдались 42 засечки. Гирокопические азимуты определялись с точностью  $m_\alpha = 5''$ . По малости поправок за приведение дирекционных углов на плоскость они не учитывались.

Характеристики сетей, а также результаты вычислений приведены в таблице. Значком «\*» в ней обозначены сети, в которых исходная сторона  $S_1$  длиннее стороны  $S_2$  до определяемого пункта. Невязки определены по разностям координат, вычисленным по (1), полученным в триангуляции 3 класса и принятым за безошибочные. Погрешности  $M_{\text{предв.}}$  вычисляли по формуле (13) при  $m_\alpha = 5''$ .

Расхождения между  $f_{\text{абс.}}$  и  $M_{\text{предв.}}$  показывают, что погрешности ориентирования в сетях меньше  $5''$ . Из значений  $f_{\text{абс.}}$  следует, что гиротеодолиты типа Ги-Б обеспечивают привязку пунктов обратной однократной засечкой с точностью, соответствующей триангуляции I разряда. При углах засечки от  $25$  до  $150^\circ$  и расстояниях до  $5$  км практически во всех сетях обеспечивается требуемая точность.

Сравнивая значения  $M_{\text{предв.}}$ , полученные для засечек с разными геометрическими характеристиками, можно утверждать, что отклонение фигуры от равнобедренного треугольника мало влияет

## Характеристики и результаты обработки реальных гирокопических засечек

Показатели		Параметры засечек														
Угол при определении пункте, ...°	Меньший из углов при исх. стороне, ...°	7	9	19	26	26	28	28	33	34	36	37	37	38	38	39
$S_1$ , км	2,9	7	26	19	54	36	39	61	26	28	33	39	66	66	66	37
$S_2$ , км	6,8	4,0	2,2	2,9	2,2	3,6	3,5	2,2	2,7	4,4	3,5	2,7	2,2	2,2	2,2	2,9
$S_3$ , км	4,0	2,9	2,9	2,2	2,7	4,3	6,8	4,0	4,3	6,8	4,0	4,4	3,4	3,4	3,4	4,4
$S_2 : S_1$	2,34	1,70	2,14	1,62	1,95	1,89	1,94	1,82	1,59	1,55	1,55	1,44	1,63	1,55	1,55	1,52
$S_2 : S_3$	1,70	2,34	1,62	2,14	1,59	1,55	1,45	1,14	1,95	1,94	1,82	1,52	1,06	1,06	1,06	1,63
$f_{\text{абс}}$ , см	140,5	78,1	38,2	3,5	5,9	26,6	25,3	16,4	3,6	52,5	8,7	17,8	5,5	5,5	5,2	5,2
$M_{\text{предв}}$ при $m_\alpha = 5''$ , см	166,7	112,9	40,8	28,7	28,2	42,0	42,4	23,7	21,0	32,0	12,6	21,5	18,4	18,4	18,4	20,0
Угол при определении пункте, ...°	Меньший из углов при исх. стороне, ...°	39	40	42	47	52	53	55	56	59	59	60	65	65	66	66
$S_1$ , км	4,7	3,0	2,7	3,4	3,5	3,6	2,9	4,3	3,0	4,4	3,6	4,7	3,2	3,2	3,2	3,2
$S_2$ , км	6,8	4,7	4,0	4,7	4,3	4,3	3,2	4,7	3,2	4,7	4,0	4,0	3,0	3,0	3,0	3,4
$S_3$ , км	3,5	3,5	3,5	3,0	3,5	3,5	3,0	4,4	2,9	4,3	2,7	4,3	2,9	2,9	2,9	2,2
$S_2 : S_1$	1,45	1,57	1,48	1,38	1,23	1,19	1,10	1,09	1,07	1,07	1,11	0,94*	0,94*	0,94*	0,94*	1,06
$S_2 : S_3$	1,94	1,34	1,14	1,57	1,23	1,23	1,07	1,07	1,10	1,09	1,48	1,02	1,03	1,03	1,03	1,55
$f_{\text{абс}}$ , см	28,3	2,9	17,3	24,0	5,9	3,4	4,7	24,6	8,0	4,1	11,4	6,1	18,6	18,6	18,6	3,6
$M_{\text{предв}}$ при $m_\alpha = 5''$ , см	29,2	21,9	18,0	18,5	17,1	16,7	12,9	18,9	12,2	17,8	13,6	16,5	11,1	11,1	10,7	10,7
Угол при определении пункте, ...°	Меньший из углов при исх. стороне, ...°	75	75	78	87	94	99	102	104	112	117	121	135	152	164	
$S_1$ , км	4,3	6,7	4,0	4,0	4,7	5,9	5,9	4,4	6,8	6,8	4,3	4,7	6,7	6,7	6,8	6,8
$S_2$ , км	3,5	6,8	3,5	3,5	4,3	4,4	2,9	4,7	4,4	2,7	2,9	2,2	3,5	3,5	4,0	4,0
$S_3$ , км	3,0	2,7	2,2	3,0	3,4	3,0	2,7	3,5	3,5	2,2	2,2	2,2	3,4	3,4	3,4	2,9
$S_2 : S_1$	0,81*	1,01	0,88*	0,72*	0,73*	0,75*	0,66*	0,69*	0,69*	0,63*	0,63*	0,62*	0,53*	0,53*	0,53*	0,59*
$S_2 : S_3$	1,00	2,27	1,30	1,59	1,13	1,26	1,47	1,07	1,34	1,26	1,23	1,23	1,32	1,32	1,32	1,38
$f_{\text{абс}}$ , см	16,9	27,9	5,8	3,5	6,4	3,8	28,1	4,2	3,9	7,0	2,5	7,1	4,5	4,5	4,1	4,1
$M_{\text{предв}}$ при $m_\alpha = 5''$ , см	12,5	18,7	11,1	10,0	11,0	13,4	13,3	10,0	15,3	15,4	9,8	12,4	25,4	25,4	25,4	44,0

на точность определяемого пункта. Так, при равных углах засечки, но разных длинах сторон  $S_1$  и  $S_2$  значения  $M_{\text{предв.}}$  равны (см. табл., графы 32, 34). Точность также мало зависит от угла засечки в интервале  $30\dots150^\circ$ . Так, при равенстве других параметров, но разных углах засечки, значения  $M_{\text{предв.}}$  практически равны между собой (см. табл., графы 12, 34).

Анализ результатов, приведенных в таблице, показывает, что точность положения пункта существенно зависит от длины наибольшей стороны, а также от соотношения длины этой стороны и исходной. Так, при равных углах засечки, но существенном различии соотношений  $S_2 : S_1$  величины  $M_{\text{предв.}}$  значительно отличаются (см. табл., графы 12, 13).

Если наибольшая сторона превышает 4 км, то предвычисленная точность положения определяемого пункта практически при любых углах засечки не удовлетворяет требованиям триангуляции I разряда (см. табл., графы 24, 26, 33). По мере приближения определяемого пункта к исходным, точность его существенно повышается. В сетях, обозначенных значком «\*», погрешности положения пунктов не превышают допусков, установленных для сетей триангуляции I разряда [1].

Таким образом, для привязки пунктов обратной однократной гироскопической засечкой с точностью, удовлетворяющей триангуляции I разряда, необходимо выполнение следующих условий:

пределная ошибка дирекционного угла  $\leqslant 5''$ ;

наименьший угол при определяемом пункте  $30^\circ$ ;

максимальная длина стороны до исходного пункта 4 км.

Отношение наибольшей стороны до исходного пункта к исходной стороне  $\leqslant 1,2$ .

1. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. — М.: Недра, 1973. — 176 с.
2. Кузьмин Б. С., Литвинов Б. А. Руководство по геодезии: (Общие сведения и триангуляция). — М.: ВИА, 1961. — 722 с.