УДК 532.54.013.2

Р. М. Гнатів, М. П. Босак, І. Р. Гнатів
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра гідравліки та сантехніки

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАПІРНИХ ТЕЧІЙ У ТРУБАХ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

У статті розглянуто математичне моделювання нестаціонарних неперіодичних процесів за напірного руху рідини в циліндричних трубах. На основі рівнянь Нав’є-Стокса для стисливої рідини виведено спрощені рівняння для випадку довгих труб. Показано, що для моделювання одноразових процесів ці рівняння містять тільки один безрозмірний параметр. Вказано умови, при яких можливе подальше спрощення цих рівнянь до форми, яка не містить жодного безрозмірного параметра. Загальне дослідження прискорених неперіодичних процесів проводиться на основі розгляду модельної задачі, для якої обраний такий процес у трубі за миттєвої зміни тиску. Вказано умови, за яких можна перейти до моделей руху нестисливої рідини і до рухів з великим загасанням. Отримано критерій переходу від ламінарного режиму руху до турбулентного, що дозволяє визначити межі застосування розглянутих моделей руху. До теперішнього часу відсутня теорія розрахунку моменту втрати стійкості ламінарного режиму течії і переходу до турбулентного в нестаціонарних потоках, а отже, відсутні межі застосовності розглянутих вище моделей ламінарного руху, що призводить до необхідності користуватися результатами фізичного моделювання, отриманими з експериментальних даних.

Ключові слова: математична модель, неусталений, нестаціонарний, одноразовий, рух рідини.

R. Hnativ, M. Bosak, I. Hnativ
Lviv Polytechnic National University,
Department of hydraulics and plumbing

RESEARCH UNSTEADY A PRESSURE HEAD PIPE FLOW BASED ON MATHEMATICAL MODELS

The article deals with mathematical modeling of non-stationary processes non-periodic pressure of the fluid in cylindrical tubes. Based on the Navier-Stokes equations for compressible fluid withdrawn simplified equation for the case of long pipes. It is shown that modeling of single processes, these equations contain only one dimensionless parameter. Identifies conditions which may further simplify these equations to a form that does not contain a dimensionless parameter. Total non-periodic accelerated research process is based on the review model problem for which elected a process in tube for instant pressure changes. Specified the conditions under which you can go to traffic patterns and incompressible fluid movements with high attenuation. The criterion of the transition from laminar to turbulent motion mode that allows you to determine the scope of application of these models movement.To date, no theory calculation since buckling laminar flow regime and transition to a turbulent unsteady flows and therefore no limits applicability of the above models laminar motion, making it necessary to use physical simulation results obtained from experimental data.

Key words: mathematical model, unstable, transient, disposable, fluid motion.

Вступ. Залежно від зміни фізичних величин із часом нестаціонарні гідродинамічні процеси в трубах поділяються на періодичні та одноразові (неперіодичні). Крім того, режим руху середовища за нестаціонарного процесу може бути ламінарним або турбулентним. При цьому перехід від ламінарного до турбулентного режиму руху середовища відбувається за критичних чисел, що залежать від параметрів розглянутого процесу. Велика різноманітність нестаціонарних гідродинамічних процесів ускладнює їхнє математичне та експериментальне моделювання.

Огляд наукових джерел і публікацій. Найґрунтовніші дослідження в галузі неусталених рухів середовища проведено з періодичними процесами. Число робіт для неперіодичних нестаціонарних процесів у трубах менш чисельне. Детальніше досліджений випадок стисливої рідини. Розгінний рух нестисливої рідини в трубі за раптової зміни тиску розглянуто в класичних роботах [1, 2]. Дослідженню гідравлічного тертя в трубах при одноразових процесах за ламінарного режиму течії нестисливої рідини присвячені роботи [3–5]. Математичні моделі та деякі задачі для неперіодичних нестаціонарних процесів у трубах з урахуванням стисливості рідини наведено в роботах [6–8]. Процес переходу ламінарної форми руху в турбулентну розглянуто в дослідженнях [4, 9–12].

Мета та завдання дослідження полягає в удосконаленні методики розрахунку структур неусталених потоків рідини в круглих трубопроводах та отримання їхніх гідродинамічних характеристик.

Результати досліджень. Рівняння осесиметричного руху в круглих трубах для стисливої в’язкої рідини можна записати в наступному безрозмірному вигляді

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial u}{\partial \tau}+\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial \xi}+\varepsilon v\frac{\partial u}{\partial \eta}=-\mathrm{Eu}\varepsilon\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]+\frac{\varepsilon^2}{3\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}\frac{\partial v}{\partial \tau}+\varepsilon u\frac{\partial v}{\partial \xi}+\varepsilon v\frac{\partial v}{\partial \eta}=-\frac{\mathrm{Eu}}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{v}{\eta}\right]+\\ +\frac{1}{3\mathrm{Re}}\left[\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{v}{\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right],\end{aligned} \tag{2}$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial p}{\partial \tau}+\chi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{v}{\eta}\right)+\varepsilon u\frac{\partial p}{\partial \xi}+\varepsilon v\frac{\partial p}{\partial \eta}=0. \tag{3}$$

де

$$u=\mathrm{U}_0\mathrm{u}\,,\quad v=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{U}_0\mathrm{v},\quad p=\mathrm{p}_0\mathrm{p}\,,\ z=\mathrm{L}\xi\ ,\ r=\mathrm{R}\xi\ ,\ t=\mathrm{T}\tau\,, \tag{4}$$

тут U_0,p_0,T, L – характерні масштабні значення для відповідних змінних; R – радіус труби; η – безрозмірна координата в радіальному напрямку; τ – безрозмірний час; ξ – безрозмірна поздовжня координата.

Безрозмірні величини позначені так

$$\mathrm{Sh}=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{U}_0\mathrm{T}}\,,\quad \mathrm{Eu}=\frac{\mathrm{p}_0}{r\mathrm{U}_0^2}\,,\ \mathrm{Re}=\frac{\mathrm{U}_0\mathrm{R}}{\nu},\ \varepsilon=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}},\ c=\frac{rc^2}{p_0},\quad \xi=\varepsilon\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}. \tag{5}$$

де *Sh* – число Струхаля; Eu – число Ейлера; Re – число Рейнольдса.

У випадку довгих труб ε < < 1. Якщо припускати, що

$$\mathrm{Sh}>e\ ,\ \mathrm{Eu}>1\,,\ 1/\mathrm{Re}>e\ ,\ c>1\,, \tag{6}$$

то рівняння (1) – (3) для довгих труб спрощуються до вигляду

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial \tau}=-\frac{\partial p}{\partial \xi}+\alpha_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta}=0\,, \tag{8}$$

$$\alpha_3\frac{\partial p}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{v}{\eta}=0. \tag{9}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Eu}\varepsilon} = \frac{\rho L U_0}{p_0 T}, \ \alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{ReEu}} = \frac{\nu\, \rho L U_0}{p_0 R^2}, \ \alpha_3 = \frac{\mathrm{Sh}}{\chi\varepsilon} = \frac{p_0 L}{\rho c^2 U_0 T}. \tag{10}$$

Рівняння (7) – (9) є рівняннями відомої дисипативної моделі [6–8]. За заданого масштабу тиску p_0 є три варіанти вибору T і U_0 (часу і швидкості). При цьому для цих варіантів:

$$1)\ \ \alpha_1 = \alpha_3 = 1 \text{ або } \varepsilon\mathrm{Eu} = \mathrm{Sh};\ \ \varepsilon c = \mathrm{Sh}. \tag{11}$$

$$2)\ \ \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ або } \varepsilon\mathrm{Eu} = \mathrm{Sh};\ \ \mathrm{ReSh} = 1. \tag{12}$$

$$3)\ \ \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \text{ або } \varepsilon\mathrm{ReEu} = 1;\ \ \varepsilon c = \mathrm{Sh}. \tag{13}$$

Масштаби T і U_0, що отримані з умов (11) – (13), наведені в табл. 1. Якщо ввести позначення

$$T_1 = \frac{L}{c}, \quad T_2 = \frac{R^2}{\nu}, \ T_3 = \frac{\nu L^2}{c^2 R^2}, \ a = \frac{\nu L}{cR^2}, b = \frac{p_0}{r_c}, \tag{14}$$

то цю таблицю можна представити у вигляді табл. 2.

Таблиця 1

Залежність безрозмірних коефіцієнтів від T і U_0 для різних варіантів

Варіанти	T	U_0	α_1	α_2	α_3
1	$\frac{L}{c}$	$\frac{p_0}{rc}$	1	$\frac{nL}{cR^2}$	1
2	$\frac{R^2}{n}$	$\frac{p_0 R^2}{rnL}$	1	1	$\frac{n^2L^2}{c^2R^4}$
3	$\frac{nL^2}{c^2R}$	$\frac{p_0 R^2}{nrL}$	$\frac{c^2R^4}{n^2L^2}$	1	1

Таблиця 2

Залежність безрозмірних величин від T і U_0 для різних варіантів

Варіанти	T	U0	α1	α2	α3
1	T1	β	1	α	1
2	T2	$b\,\frac{T_2}{T_1}$	1	1	α2
3	T3	$b\,\frac{T_1}{T_3}$	α-2	1	1

З наведеної таблиці видно, що єдиним безрозмірним параметром для нестаціонарних процесів у цих трубах є α. На таку інформацію вказано в роботі [5].

Для зазначених варіантів масштабів умови застосовності моделі для довгих труб (6) приймають відповідно такий вигляд:

$$1)\ \mathrm{Sh} >> \varepsilon,\ 1/\mathrm{Re} >> \varepsilon \text{ або } \alpha\chi >> 1,\ \chi >> 1, \tag{15}$$

$$2)\ \ \mathrm{Sh} >> \varepsilon,\ \chi >> 1 \text{ або } \alpha^2\chi >> 1,\ \chi >> 1, \tag{16}$$

$$3)\ \ \mathrm{Sh} >> \varepsilon,\ \mathrm{Eu} >> 1 \text{ або } \alpha^2\chi >> 1,\ \chi >> 1. \tag{17}$$

Розглянемо задачу про раптове прикладення постійного тиску в кінці труби за допомогою дисипативної моделі за першого варіанту вибору масштабів. Відповідна математична модель задачі випливає зі співвідношень (7)–(9) при, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \tag{20}$$

Початкові і граничні умови цієї задачі мають вигляд

$u = 0$; $p = 1$ при $\tau = 0$;

$p = 1$ при $\xi = 0$;

$p = 0$ при $\xi = 1$;

$u = 0$, $v = 1$ при $\eta = 1$.

Чисельне значення параметра α визначає вплив сил в'язкого тертя на неперіодичний процес. Подальше спрощення дисипативної моделі і виключення єдиного безрозмірного параметра α із задачі можливе, якщо, крім умов (15) – (17), ввести додаткові умови щодо порядку параметра α.

Якщо в такому випадку першого варіанта вибору масштабів вважати, що

$$Sh \ll 1/Re \text{ або } \alpha \ll 1 \tag{21}$$

і нехтувати відповідною складовою в рівнянні (18), отримаємо модель для питомої рідини з рівняннями

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \tag{24}$$

Розглядаємо модель нестисливої рідини. Якщо у випадку другого варіанта вибору масштабів прийняти, що

$$Sh \ll \varepsilon\chi \text{ або } \alpha^2 \ll 1, \tag{25}$$

і знехтувати відповідним членом у рівнянні (9), маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{26}$$

Зі співвідношень (16) і (25) випливає, що цю модель можна застосувати, якщо

$$\varepsilon \ll Sh \ll \varepsilon\chi \text{ або } 1 \ll \alpha^2\chi \ll \chi, \tag{27}$$

причому

$$Eu = \frac{Sh}{\varepsilon},\ Re = \frac{1}{Sh}. \tag{28}$$

За миттєвої зміни градієнта тиску

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -1. \tag{29}$$

Якщо у випадку третього варіанта вибору масштабів (13) вважати, що

$$Sh \ll \varepsilon Eu \text{ або } \alpha^2 \gg 1 \tag{30}$$

і знехтувати складовою з коефіцієнтом α_1 в рівнянні (7), маємо систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \tag{33}$$

Ця модель описує рухи рідини з великим загасанням, оскільки в першому рівнянні не враховується інерційна складова. Зі співвідношень (17) і (30) маємо, що ця модель може бути застосована, якщо

$$\varepsilon << \mathrm{Sh} << \varepsilon\, \mathrm{Eu} \text{ або } 1 << \chi << \alpha^2\chi, \tag{34}$$

причому

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Eu}}, \varepsilon\chi = \mathrm{Sh}. \tag{35}$$

Досі відсутня теорія розрахунку моменту втрати стійкості ламінарного режиму течії і переходу до турбулентного в нестаціонарних потоках, а отже, відсутні також межі застосовності розглянутих вище моделей ламінарного руху. Тому необхідно користуватися результатами фізичного моделювання, отриманими з експериментальних даних.

Висновки. Розглянуто математичне моделювання нестаціонарних неперіодичних процесів за напірного руху рідини в циліндричних трубах. На основі рівнянь Нав'є-Стокса для стисливої рідини виведено спрощені рівняння для випадку довгих труб. Показано, що для моделювання одноразових процесів ці рівняння містять тільки один безрозмірний параметр. Вказуються умови, за яких можливе подальше спрощення цих рівнянь до форми, яка не містить жодного безрозмірного параметра. Загальне дослідження прискорених неперіодичних процесів проводиться на основі розгляду модельної задачі, для якої обраний такий процес у трубі за миттєвої зміни тиску. Вказано умови, за яких можна перейти до моделей руху нестисливої рідини і до рухів з великим загасанням. Отримано критерій переходу від ламінарного режиму руху до турбулентного, що дає змогу визначити межі застосування розглянутих моделей руху.

1. Adamkowski A. Experimental examination of unsteady friction models for transient pipe flow simulation / Adam Adamkowski, Mariusz Lewandowski // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 2006. – 128. – No. 6. – C. 1351–1363. 2. Reinhold I. Velocity profile influence on electromagnetic flowmeter accuracy / I. Reinhold // Proc. FLOMEKO. – 1978. – Netherland. – P. 181–185. 3. Letelier S. M. F. Unified approach to the solution of problems of unsteady flow in long pipes/ S.M. F. Letelier, H. J. Leutheusser // J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50, N 1. – P. 8–12. 4. Байбаков Б. С. Сопротивление трения при ускоренном течении в трубе / Б. С. Байбаков, О. Ф. Орешкин, А. М. Прудовский // Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа. – 1981. – No. 5. – С. 137–139. 5. Логов И. Л. К вопросу о сопротивлении трения при ускоренном течении в трубе / И. Л. Логов // Изв. АН СССР, Механ. жидк. и газа. – 1983. – № 6. – С. 169–174. 6. Jayasinghe D. A. P. Pulsatile Waterhammer Subject to Laminar Friction / D. A. P. Jayasinghe, H. J. Leutheusser // J. Fluids Eng. – 1972. – No. 94(2). – C. 467–472. 7. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И. А. Чарный. – М.: Недра, 1975. – 296 с. 8. Попов Д. Н. Нестационарные гидромеханические процессы / Д. Н. Попов. – М.: Машиностроение, 1982. – 239 с. 9. Masliyah J. H. Laminar Transient flow in pipes / J. H. Masliyah, C. A. Shook // Can. J. Chem. Eng. – 1975. – Vol. 53. – No. 10. – P. 469–475. 10. Leutheusser H. J. Problems of accelerated fluid motion / H. J. Leutheusser// Proc. XVII Cong. IAHR, Baden-Baden, Germany. – 1977. – Vol. 6. – P. 247–252. 11. Бондаренко Ю. А. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики / Ю. А. Бондаренко. Обзор зарубежной литературы / Ю. А. Бондаренко, В. В. Башуров, Ю. В. Янилкин. – М. 2003. – (Препринт / РФЯЦ ВНИИЭФ; – No. 88-2003). 12. Jachno O. M. RÓwnania niestacjonarnego przepływu laminarnego cieczy ściśliwej w rurze cylindrycznej / O. M. Jachno, R. M. Hnatiw, I. R. Hnatiw // Nauka i studia. – 2017. – No. 2 (163). – ISSN 1561–6894. – C. 97–102.