РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 18

УДК 528.41

И. С. ТРЕВОГО

О ДОПУСТИМОЙ ИЗОГНУТОСТИ ВЫТЯНУТЫХ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ХОДОВ

В геодезической практике в соответствии с требованием инструкций по полигонометрии стремятся прокладывать по возможности прямолинейные равносторонние ходы, поскольку они имеют ряд преимуществ перед ходами иной формы. Все же часто по разным причинам приходится отступать от строго вытянутой формы хода, отсюда целесообразно установить надежный критерий для допустимой изогнутости вытянутого полигонометрического хода. А. С. Чеботарев [5] рассмотрел этот вопрос для городской и инженерной полигонометрии. Согласно его расчетам, выполненным с использованием принципа равных влияний (m_u—m_t), любой ход является вытянутым, если он отклоняется от замыкающей не более чем на $\eta_0 \leqslant 0{,}125\,L$, а угол α_0 между стороной хода и замыкающей не превышает 24°. Однако, как мы покажем ниже и как отмечалось в работе [2], на практике величины η_0 и α_0 отклоняются от значений, полученных А. С. Чеботаревым, в зависимости от длины хода, числа его вершин и соотношения точности угловых и линейных измерений.

Наша цель получить формулы для расчета надежных значений η_0 и α_0 для полигонометрического хода и расширить одновременно границы критерия изогнутости.

Полигонометрический ход считается вытянутым, если последние члены в формулах для продольной m_t и поперечной m_u ошибок изогнутого хода [5] пренебрегаемо малы:

$$m_t^2 = \lambda^2 L^2 + \mu^2 [S_i \cos^2 \alpha_i] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [\eta^2], \tag{1}$$

$$m_u^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [\xi^2] + \mu^2 [S_i \sin^2 \alpha_i], \tag{2}$$

где μ и λ — коэффициенты случайного и систематического влияний, S_i и L — длины сторон и замыкающей хода, η и ξ — центральные координаты вершин хода при расположении оси ξ вдоль замыкающей хода, α_i — дирекционный угол стороны после поворота осей, m_β — средняя квадратическая ошибка измерения угла. Для такого хода ошибка m_t будет зависеть только от погрешности линейных измерений, а ошибка m_u — от ошибок угловых измерений. Поэтому для достаточно вытянутого хода можно записать [5]:

$$m_u^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [D_{0,i}^2], \tag{3}$$

$$m_t^2 = \lambda^2 L^2 + \mu^2 [S_i], \tag{4}$$

где $D_{o,i}$ — расстояние от центра тяжести o до вершин хода.

Выведем формулы для определения η_0 и α_0 без применения принципа равных влияний. Для этого обратимся к выражениям [5]:

$$\eta_0 = \frac{m_t}{k} \cdot \frac{\rho}{m_\beta \sqrt{n+1}}, \tag{5}$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{m_u}{k\mu \sqrt{[S_i]}}, \tag{6}$$

где n — число сторон в ходе, k — коэффициент «пренебрегаемости». Подставив в выражения (5) и (6) значения m_t и m_u из (3) и (4), получим:

$$\eta_0 = \frac{\rho \sqrt{\mu^2 [S_i] + \lambda^2 L^2}}{km_\beta \sqrt{n+1}}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{m_\beta \sqrt{[D^2_{0,i}]}}{k \cdot \mu \cdot \rho \sqrt{[S_i]}}.$$

А вводя обозначения $\frac{m_\beta}{\mu\rho} = q$ и $\lambda = c\mu$, имеем:

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{[S_i] + c^2 L^2}}{qk \sqrt{n+1}}, \tag{7}$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{q \sqrt{[D^2_{0,i}]}}{k \sqrt{[S_i]}}. \tag{8}$$

Обозначив отношение поперечной и продольной ошибок через Q, получим

$$Q = \frac{m_u}{m_t} = \frac{q \sqrt{[D^2_{0,i}]}}{\sqrt{[S_i] + c^2 L^2}}. \tag{9}$$

В соответствии с принципом равных влияний Q должно быть равно единице, но согласно выражению (9), с изменением длины и числа вершин хода отношение Q может принимать различные значения, так как величина q для одного разряда полигонометрии принимается постоянной. Следовательно, применять принцип равных влияний для оценки изогнутости хода нет оснований. С учетом формулы (9) выражения (7) и (8) примут вид

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{[D^2_{0,i}]}}{kQ \sqrt{n+1}}, \tag{10}$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{Q \sqrt{[S_i] + c^2 L^2}}{k \sqrt{[S_i]}}. \tag{11}$$

Определим значение величины k. Ее можно определить по равенству [2]

$$k = \frac{7}{\sqrt{K\,\%}}, \tag{12}$$

но для этого необходимо установить и обосновать величину ошибки $K\%$. В работе [5] принято: $K=1\%$, предельное $K=3\%$. В [2] и [3] допускается соответственно: $K=5\%$ и предельное $K=10\%$. Если проанализировать формулы (10), то можно прийти к выводу, что величина ошибки K зависит в основном от того, насколько точно определены μ, λ и m_β. Как показали наши исследования [4], эти величины, полученные даже при большом числе ходов (425), содержат погрешности 3—8%. Вследствие этого нет оснований накладывать на ошибку $K\%$ слишком жесткий допуск и требовать чтобы $K=1\%$. Можно вполне согласиться с Б. А. Литвиновым и В. Ф. Антонюженко [3 и 2] и принять: $K=5\%$, предельное $K=10\%$.

При $K=10\%$ по формуле (12) находим, что $k=2{,}21$ и, подставляя его в формулы (10), окончательно получаем выражение для расчета предельных η_0 и α_0:

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{[D_{0,i}^2]}}{2{,}21 \cdot Q \sqrt{n+1}}, \tag{13}$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{Q \sqrt{[S_i] + c^2 L^2}}{2{,}21 \sqrt{[S_i]}} \leqslant 1. \tag{14}$$

В. Ф. Антонюженко [2] предлагает упрощенные формулы для расчета предельных значений η_0' и α_0':

$$\eta_0' = \frac{0{,}134 [S_i]}{\sqrt{Q'}}; \sin \alpha_0' = 0{,}45 \sqrt{Q'}, \tag{15}$$

где $Q' = m_u^2 : m_t^2$. Равенства (15) выведены без применения принципа равных влияний, но для равносторонних ходов и без учета систематических ошибок линейных измерений, то есть вместо выражений (1—4) использовались формулы:

$$m_t^2 = \mu^2 [S_i \cos^2 \alpha_i] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [\eta^2]; \tag{16}$$

$$m_u^2 = \mu^2 [S_i \sin^2 \alpha_i] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [\xi^2]; \tag{17}$$

$$m_t^2 = \mu^2 [S_i]; \tag{18}$$

$$m_u^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{12n} L^2. \tag{19}$$

Однако равносторонние ходы встречаются на практике довольно редко, поэтому пользование формулами (15) ограничено, в то время как формулы (13) и (14) могут применяться для реальных ходов.

Ниже даны значения m_t, вычисленные по выражениям (3) и (18) для ходов разной длины:

$[S_i]$	1,0	1,5	2,0	2.5	3,0	3,5	4,0	5,0
$m_t^{(3)}$	0,045	0,059	0,071	0,085	0,096	0,108	0,120	0,145
$m_t^{(18)}$	0,039	0,048	0,055	0,062	0,068	0,073	0,078	0,088

Как видим значения $m_t^{(3)}$ и m_t^{18} сильно отличаются друг от друга, поэтому пренебрегать систематической частью m_t, если она есть, при отыскании величин η_0 и α_0 нежелательно. Для расчетов взяты значения: $\mu=0{,}00123$, $\lambda=0{,}000022$, $m_\beta=\pm 6'',1$, полученные нами из большого производственного материала по городской полигонометрии 1-го разряда (стальные проволоки) [4].

Чтобы сопоставить и проверить результаты, полученные по формулам (13), (14) и (15), мы составили таблицу для шести реальных ходов, причем ходы V—VI с неравными сторонами. Из таблицы видно, что между η_0 и η_0' даже при равенстве сторон имеется существенное различие. Значения α_0 и α_0' оказались близкими для ходов с равными сторонами, при неравных сторонах они сильно расходятся. Сравнение строк 8-й и 9-й с 12-й и 14-й показывает, что все ходы можно отнести к вытянутым.

Проверим теперь, действительно ли вытянутые согласно значениям η_0, α_0, η_0' и α_0' ходы являются достаточно вытянутыми, то есть не превышен ли принятый нами допуск $K=10\%$. Обратимся для этого к значениям m_t и m_u в таблице, вычисленным для всех ходов по формулам

Вычисление величин η_0, α_0, η_0', α_0'

Строки	Величины	Ходы					
		I	II	III	IV	V	VI
1	$n+1$	8	10	9	17	7	12
2	$[S_i]$	2013	2636	3510	4162	1726	3717
3	L	2007	2628	3499	4139	1726	3528
4	$[S_i \sin^2 \alpha_i]$	7	41	20	46	0	340
5	$[S_i \cos^2 \alpha_i]$	2006	2594	3489	4115	1726	3326
6	$[\eta^2] \cdot 10^{-3}$	1	28	77	40	0	200
7	$[\xi^2] \cdot 10^{-3}$	3664	7101	11546	28404	3627	20135
8	η_{max}	20	85	50	95	0	317
9	α_{max}	5°	11°	21°	21°	0°	42°
10	Q	0,82	0,95	0,99	1,34	0,91	1,27
11	$\sqrt{Q}$	1,00	1,25	1,39	1,98	0,90	1,57
12	η_0	349	397	501	425	334	445
13	η_0'	270	282	338	281	256	317
14	α_0	29°	36°	41°	68°	31°	57°
15	α_0'	27°	34°	39°	63°	24°	45°
16	$m_u^{(4)}$	0,058	0,082	0,105	0,163	0,058	0,138
17	$m_t^{(3)}$	0,071	0,086	0,106	0,121	0,064	0,108
18	$m_u^{(2)}$	0,058	0,082	0,104	0,163	0,058	0,139
19	$m_t^{(1)}$	0,071	0,086	0,107	0,121	0,064	0,106
20	$m_u^{(19)}$	0,056	0,080	0,102	0,159	0,046	0,116
21	$m_t^{(18)}$	0,056	0,064	0,073	0,080	0,051	0,074
22	$m_u^{(17)}$	0,058	0,082	0,104	0,163	0,058	0,139
23	$m_t^{(16)}$	0,055	0,064	0,073	0,080	0,051	0,073

Примечание. Величины в строках 2—5, 8, 12—13, 16—23 приведены в метрах

(1—4) (см. строки 16—19) и по формулам (16—19) (см. строки 20—23). Как видим, m_t и m_u, полученные по формулам (1), (3) и (2), (4) (эти формулы использовались нами при выводе выражений (13), (14)), в большинстве случаев совпадают и только в двух случаях расходятся на 1—2%, но это меньше допустимого $K=10\%$.

Значения m_t и m_u, вычисленные в таблице по приближенным формулам (16—19), использованным В. Ф. Антонюженко для получения выражений (15), в большинстве случаев расходятся. $m_t^{(18)}$ отличается от $m_t^{(16)}$ на 1—2%, но они существенно меньше $m_t^{(1)}$ и $m_t^{(3)}$. Ошибки $m_u^{(19)}$ и $m_u^{(17)}$ расходятся на 2—6% для ходов с равными сторонами I—IV, а для ходов V—VI с неравными сторонами расхождение составляет соответственно 21% и 17% и значительно превышает $K=10\%$ хотя, как показано выше, оба хода вытянутые. Итак, применение приближенных формул к неравносторонним ходам для расчета m_u, а следовательно, и величин η_0' и α_0', полученных по формулам (15), может привести к ошибочным результатам.

Таким образом, формулы (13—14) более надежны для оценки изогнутости вытянутых ходов, чем формулы (15).

Чтобы решить вопрос о достаточной вытянутости хода, необходимо кроме η_0 и α_0 знать фактические значения η_{max} и α_{max}. Эти величины с достаточной точностью можно получать графическим путем, пользуясь схемой сети.

Нахождение $[D^2_{0,i}]$ в случае необходимости можно значительно ускорить, используя упрощенную формулу В. И. Акулова [1].

$$[D^2_{0,i}] \approx \frac{n+1}{45}([S_i]+L)^2. \tag{21}$$

Многочисленные вычисления $[D^2_{0,i}]$, выполненные нами по формуле (21) и строгим методом, позволили найти поправочные множители к формуле (21):

$n+1$	6—7	8—9	10—11	12—13	14—15	16—17
p	1,35	1,24	1,20	1,15	1,04	1,01

При измерении сторон полигонометрии светодальномерами вместо формул (9), (13) и (14) мы получили следующие выражения:

$$Q = \frac{m_\beta \sqrt{[D^2_{0,i}]}}{\rho m_s \sqrt{n}}; \tag{22}$$

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{[D^2_{0,i}]}}{2{,}21 \cdot Q\sqrt{n+1}}; \tag{23}$$

$$\sin\alpha_0 = 0{,}45\,Q \leqslant 1. \tag{24}$$

Для быстрого определения величин η_0 и α_0 целесообразно составить таблицы или номограммы по формулам (13), (14), (23), (24). При этом необходимо использовать показатели точности полигонометрии, полученные с высокой точностью, например по методу [4].

Расчеты показывают, что η_0 и α_0, найденные по описанному методу, принимают значения в широких пределах, особенно α_0 (может достигать 90°).

Таким образом, используя предлагаемые в статье формулы (13), (14), (23) и (24), можно вполне надежно устанавливать, достаточно ли вытянут полигонометрический ход независимо от неравенства его сторон. Описанный метод может быть использован при проектировании и обработке ходов и сетей городской и инженерной полигонометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулов В. И. Установление весов ходов при раздельном уравновешивании полигонометрических сетей. — «Геодезия и картография», 1968, № 2.

2. Антонюженко В. Ф. Критерий изогнутости полигонометрического хода. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 1, М., 1961.

3. Литвинов Б. А. Основные вопросы построения и уравновешивания полигонометрических сетей. М., Геодезиздат, 1962.

4. Тревого И. С. О методах вычисления коэффициентов случайного и систематического влияний в городской и инженерной полигонометрии. — В сб.: «Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 16. Изд-во Львовского ун-та, 1972.

5. Чеботарев А. С. Геодезия, ч. 2. М., Геодезиздат, 1962.

Работа поступила в редколлегию 20 марта 1972 года. Рекомендована кафедрой геодезии Львовского политехнического института.