

УДК 528.061

Ф. М. УРМАНЦЕВ

К ТЕОРИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ

Ход светового луча в неоднородной среде описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \delta; \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\operatorname{tg} \Theta}{\cos \delta}; \\ \frac{d\delta}{dx} &= \frac{\mu_y - \mu_x \operatorname{tg} \delta}{\cos^2 \Theta}; \\ \frac{d\Theta}{dx} &= \frac{\mu_z}{\cos \delta} - \operatorname{tg} \Theta (\mu_x + \mu_y \operatorname{tg} \delta), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где Θ — угол между касательной к кривой и плоскостью $хоу$,
 δ — угол между осью $ох$ и проекцией касательной на плоскость $хоу$,
 $\mu_x = \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$, $\mu_y = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy}$, $\mu_z = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$ — градиент показателя преломления воздуха по соответствующей оси.

Система уравнений (1) получена Михелевым [3] на основе принципа максимума Понтрягина. Вывод является далеко не очевидным. Поэтому мы вывели формулы иным путем [4], который можно назвать полугеометрическим.

Покажем, что система (1) может быть положена в основу расчетов влияния рефракции применительно ко всякого рода измерениям, связанным с оптическим визированием.

Систему координат выберем так, чтобы угол δ был достаточно мал, например, плоскость $хоз$ совместим с началом и концом светового луча. $оз$ направим вверх по отвесной линии (система координат I). В этом случае членами с δ^2 , а также с произведениями $\mu\delta$ можно пренебречь и систему уравнений (1) написать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \delta; \\ \frac{dz}{dx} &= \operatorname{tg} \Theta; \\ \frac{d\delta}{dx} &= \frac{\mu_y}{\cos^2 \Theta}; \\ \frac{d\Theta}{dx} &= \mu_z - \operatorname{tg} \Theta \mu_x. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При решении многих задач по определению влияния рефракции на небольшие расстояния удобно ось ox совместить с касательной к началу светового луча, а ось oz направить по нормали к лучу (система координат II). Пренебрегая членами, содержащими малые члены δ , Θ и μ во второй степени и выше, а также их произведения, систему уравнений (1) можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \delta; \\ \frac{dz}{dx} &= \Theta; \\ \frac{d\delta}{dx} &= \mu_y; \\ \frac{d\Theta}{dx} &= \mu_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первое и третье уравнения системы (2) позволяют написать равенство

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu_y}{\cos^2 \Theta}, \quad (4)$$

определяющее проекцию луча в плоскости XOY . Из второго и четвертого уравнений системы (2) получаем выражение

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\mu_z}{\cos^2 \Theta} - \frac{\operatorname{tg} \Theta}{\cos^2 \Theta} \mu_x, \quad (5)$$

определяющее проекцию луча в плоскости xoz .

Решим уравнение (5) в общем виде методом вариации постоянных:

$$z = c_1 x + c_2 + z^*, \quad z^* = c_3 x + c_4,$$

где z^* — частное решение (5), соответствующее правой части

$$f(x) = \frac{\mu_z}{\cos^2 \Theta} - \frac{\operatorname{tg} \Theta}{\cos^2 \Theta} \mu_x.$$

Вариации постоянных позволяют получить следующие два равенства для определения c_3 и c_4 :

$$c_3' x + c_4' = 0, \quad c_3' = f(x).$$

Штрих означает производную по переменной x

$$c_3 = \int_0^x f(x) dx, \quad c_4 = - \int_0^x x f(x) dx.$$

Следовательно,

$$z(x) = c_1 x + c_2 + x \int_0^x f(x) dx - \int_0^x x f(x) dx. \quad (6)$$

Аналогично решим уравнение (4)

$$y(x) = c_1 x + c_2 + x \int_0^x \mu_y dx - \int_0^x x \mu_y dx. \quad (7)$$

Постоянные c_1 и c_2 в формуле (6) могут быть определены из начальных условий: $x=0, z=0, \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \Theta_0$, Θ_0 — угол, полученный из наблюдений.

$$c_2=0, c_1=\operatorname{tg} \Theta_0,$$

$$z(x) = x \operatorname{tg} \Theta_0 + x \int_0^x f(x) dx - \int_0^x x f(x) dx. \quad (8)$$

В системе II уравнение (8) имеет вид

$$z(x) = x \int_0^x \mu_y dx - \int_0^x x \mu_z dx. \quad (9)$$

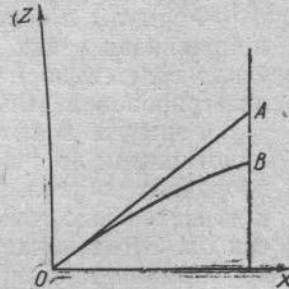
Для конца линии в точке $x=L$ получаем

$$z(L) = L \operatorname{tg} \Theta_0 + L \int_0^L f(x) dx - \int_0^L x f(x) dx. \quad (10)$$

Второе и третье слагаемые в правой части равенства (10) представляют влияние рефракции в линейной мере в точке, в которой ведутся наблюдения. Принимая под знаком интеграла $\Theta = \operatorname{const}$, входящую в функцию $f(x)$, и имея в виду, что знак поправки берется обратный знаку влияния, уравнение для вычисления поправки запишем как

$$\Delta z = -\frac{L}{\cos^2 \Theta} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \mu_z dx + \frac{L \operatorname{tg} \Theta}{\cos^2 \Theta} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \mu_x dx. \quad (11)$$

Следует специально оговорить, к каким точкам вследствие влияния рефракции приводятся наблюдения. При введении линейных поправок наблюдения приводятся к точке A , (см. рисунок) к конечной точке касательной к световой кривой в точке наблюдений (например, при нивелировании наклонным или горизонтальным лучом, измерении расстояния дифференциальным дальномером и др.). При введении угловых поправок наблюдения приводятся к точке B , то есть к конечной точке кривой, на которую ведутся наблюдения.



Искривление луча вследствие рефракции.

Разделим левую и правую части (10) на расстояние L :

$$\operatorname{tg} (\Theta_0 + \Delta \Theta_n) = \operatorname{tg} \Theta_0 + \int_0^L f(x) dx - \frac{1}{L} \int_0^L x f(x) dx.$$

Отсюда, пренебрегая членами с $\Delta \Theta^2$ и выше, поправку за вертикальную рефракцию в угловой мере в точке, в которой ведутся наблюдения, получаем в виде

$$\Delta \Theta_n = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \mu_z dx - \operatorname{tg} \Theta \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \mu_x dx. \quad (12)$$

Выражение (7) решим при начальных условиях: $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx} = \delta_n$, δ_n — боковая рефракция света в точке, в которой ведутся наблюдения.

$$c_2=0, c_1=\delta_n,$$

$$y(x) = \delta_n \cdot x + \frac{x}{\cos^2 \theta} \int_0^x \mu_y dx - \frac{1}{\cos^2 \theta} \int_0^x x \mu_y dx. \quad (13)$$

Если положить $\delta_n=0$, то получим уравнение кривой в системе координат II

$$y(x) = x \int_0^x \mu_y dx - \int_0^x x \mu_y dx. \quad (14)$$

Из уравнения (13) для конца светового луча, где $x=L$, а $y(x)=0$, получаем поправку за боковую рефракцию света

$$\delta_n = -\frac{1}{\cos^2 \theta} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \mu_y dx. \quad (15)$$

Линейная поправка равна $\Delta y_n = \delta_n L$. Формулы для расчета поправок за рефракцию света в точке, на которую ведутся наблюдения, могут быть получены из формул для расчета в точке, в которой ведутся наблюдения, если заменить в них переменную x на $L-x$. Например, из (12) поправку за вертикальную рефракцию света в угол наклона в точке, на которую ведутся наблюдения, получаем в виде

$$\Delta \theta_k = \int_0^L \frac{x}{L} \mu_z dx - \operatorname{tg} \theta \int_0^L \frac{x}{L} \mu_x dx. \quad (16)$$

Формулы в системе координат II находим из формул в системе I, приравнявая в них δ и θ нулю. Интегрирование в получаемых равенствах ведется по наклонному расстоянию. В уравнениях в системе I интегрирование выполняется по горизонтальному проложению.

Формулы в системе координат II получаются более простыми и однотипными по сравнению с формулами в системе I. Разворот системы координат на угол, равный углу наклона линии визирования, приводит к исчезновению членов, содержащих неоднородности по направлению оси ox . Это означает, что достаточно градиентные измерения провести по нормали к линии визирования, чтобы при расчетах вертикальной рефракции не обращать внимания на горизонтальные неоднородности. Практически градиентные измерения удобно проводить по вертикали. В этом случае при визировании на небольшие расстояния последующие расчеты можно упростить, если высоты замеров метеоданных спроецировать на нормаль к поверхности или точнее на нормаль к визирному лучу. Если прохождение визирного луча носит сложный характер, применяется численное интегрирование. Предварительно линия разбивается на ряд участков с достаточно однородными условиями.

Показатель преломления воздуха n связан с давлением воздуха p , температурой T и влажностью e уравнением [2]

$$n - 1 = 0,000292 \left(1 - 0,14 \frac{e}{p}\right) \frac{p T_0}{p_0 T},$$

где $p_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 273^\circ$ К.

Продифференцировав это выражение по всем входящим в него переменным, получаем изменение показателя преломления воздуха с изменением температуры, давления и влажности воздуха

$$dn = 0,000105 \frac{p}{T} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \right) - 0,000015 \frac{p}{T} \left(\frac{de}{p} - \frac{e}{p} \frac{dT}{T} \right).$$

Вторым слагаемым в этой формуле во многих случаях практики можно пренебречь и градиент показателя преломления воздуха достаточно найти из равенства

$$dn = 0,000105 \frac{p}{T} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \right). \quad (17)$$

Рассмотрим несколько простых примеров на применение приведенных формул.

1. Для определения влияния рефракции света при измерении зенитных расстояний воспользуемся уравнением (2). Предположим, что горизонтальные неоднородности атмосферы отсутствуют, $\mu_x = 0$, а неоднородность в вертикальной плоскости является линейной

$$\Delta R_n = -\mu_z \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx = -\mu_z \frac{L}{2}.$$

Знак взят минусовый, так как $z = 90 - \theta$.

Поправке за рефракцию света при выводе формулы тригонометрического нивелирования придают вид

$$\Delta R_n = -\frac{k}{2R \sin^2 z} \cdot L,$$

где k — коэффициент вертикальной рефракции, R — радиус Земли.

Таким образом, определение влияния рефракции сводится к нахождению коэффициента рефракции

$$k = R \sin^2 z \mu_z = R \sin^2 z \frac{dn}{dh}. \quad (18)$$

Подставляя в (18) выражение (17), получаем

$$k = 0,000105 R \sin^2 z \frac{p}{T} \left(\frac{1}{p} \frac{dp}{dh} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dh} \right),$$

$$k = 669 \sin^2 z \frac{p}{T} \left(\frac{1}{p} \frac{dp}{dh} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dh} \right).$$

Из уравнения статики находят вертикальный градиент давления

$$\frac{dp}{dh} = \frac{pg}{RT},$$

где g — ускорение силы тяжести, T — абсолютная температура, R — удельная газовая постоянная. $\frac{g}{R} = 0,0341$ град·м⁻¹ — постоянная.

Следовательно,

$$k = 669 \frac{p}{T^2} \left(0,0341 - \frac{dT}{dh} \right) \sin^2 z. \quad (19)$$

Получена формула Иордана—Изотова.

При $p=760$ мм рт. ст., $T=290^\circ$ К и $z=90^\circ$

$$k = 0,22 - 6,43 \frac{dT}{dh}.$$

На достаточном удалении от земной поверхности примерно $\frac{dT}{dh} = \pm 0,006$ град \cdot м $^{-1}$

$$k = 0,22 \pm 0,04 = 0,26 \div 0,18.$$

Вблизи земной поверхности $\frac{dT}{dh}$ может достигать $\pm 0^\circ,5$, то есть суточные изменения коэффициента рефракции при прохождении луча вблизи земной поверхности могут составить

$$k = 0,22 \pm 3,2 = 3,4 \div -3,0.$$

2. Элементарный отрезок ds светового луча в системе координат, принятой при выводе уравнений (3), определяется из выражения

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Поправка за непрямолинейность распространения света вследствие влияния рефракции запишется

$$\Delta s = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (21)$$

Дифференцируя уравнения (9) и (14) по x , получаем

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \mu_y dx, \quad \frac{dz}{dx} = \int_0^x \mu_z dx.$$

Будем считать μ_y и μ_z константами, что соответствует линейной неоднородности среды

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \mu_y \cdot x, \\ \frac{dz}{dx} &= \mu_z \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Подставляя (22) в уравнение (21), находим

$$\begin{aligned} \Delta s &= -\frac{1}{2} \int_0^L (\mu_y^2 + \mu_z^2) x^2 dx, \\ \Delta s &= -\frac{1}{6} (\mu_y^2 + \mu_z^2) L^3. \end{aligned} \quad (23)$$

Атмосфера неоднородна в основном с высотой, в горизонтальной плоскости неоднородности атмосферы значительно меньше. Поэтому будем полагать $\mu_y=0$.

$$\Delta s = -\frac{1}{6} \mu_z^2 L^3. \quad (24)$$

С учетом (17) и имея в виду, что

$$\frac{dp}{dh} = 0,0341 \frac{p}{T} \text{ град} \cdot \text{м}^{-1},$$

выражая поправку в мм, а расстояние в км, для $p=760$ мм рт. ст. и $T=290^\circ \text{ К}$, запишем разность между действительной длиной линии и прямолинейной

$$\Delta s = -0,15 L^3 \left[0,0012 - 0,0024 \frac{dT}{dh} + \left(\frac{dT}{dh} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

$$\text{При } L = 100 \text{ км и } \frac{dT}{dh} = 0 \quad \Delta s = -180 \text{ мм.}$$

$$\text{При } L = 100 \text{ км и } \frac{dT}{dh} = 0,5^\circ \quad \Delta s = -37 \text{ м.}$$

Второй случай предполагает прохождение луча вблизи земной поверхности. Практически для линии в 100 км это исключается. Возможно, на отдельных участках луч будет идти вблизи земной поверхности. В этом случае поправка окажется значительно меньше.

3. Вследствие рефракции света точки на снимке получают несколько смещенными от точки надира. Величину смещения можно определить из формулы

$$\delta_r = \Delta \Theta_k \left(f + \frac{r^2}{f} \right), \quad (26)$$

где f — фокусное расстояние камеры, r — расстояние до точки надира, $\Delta \Theta_k$ — отклонение луча от хорды, соединяющей точку местности и центр объектива, или вертикальный угол рефракции в точке, на которую ведутся наблюдения.

Для вычисления $\Delta \Theta_k$ воспользуемся формулой (16). Будем считать, что неоднородности в горизонтальной плоскости отсутствуют, а неоднородности с высотой меняются по закону [1]

$$n-1 = ke^{\alpha H}. \quad (27)$$

k — показатель преломления воздуха, который для нормальных условий (0° С и 760 мм рт. ст., $H=0$) равен $0,000292$; $\alpha = -0,1385 \text{ км}^{-1}$.

Из (27) следует

$$\mu_z = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \cong \frac{dn}{dh} \cong k\alpha e^{\alpha H}.$$

$$\Delta \Theta_k = \frac{k\alpha}{L} \int_0^L x e^{\alpha H} dx = \frac{K\alpha}{L} \int_0^L x e^{\frac{\alpha x}{\text{tg } z}} dx, \quad z = 90 - \Theta.$$

Интегрирование дает

$$\Delta \Theta_k = \frac{k}{\alpha H} \text{tg } z + k \text{tg } z e^{\alpha H} \left(1 - \frac{1}{\alpha H} \right).$$

Подставив численные значения констант в это выражение, получаем формулу для вычисления смещения точки на снимке вследствие рефракции света

$$\delta_2 = -0,0021 \frac{\text{tg } z}{H} \left(f + \frac{r^2}{f} \right) + 0,00029 \text{tg } z e^{-0,14 H} \left(1 + \frac{1}{1,14 H} \right) \left(f + \frac{r^2}{f} \right).$$

Для широкоугольных объективов при $H=10$ км, $z=45^\circ$, $f=100$ мм, $r=100$ мм, смещение $\delta_r=0,04$ мм.

Из изложенного видно, что предлагаемая теория является достаточно общей и в состоянии охватить все случаи практики. Приведенные примеры хорошо показывают характер упрощений и, если это понадобится, пути повышения точности расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейс Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. Перевод с англ. М., «Недра», 1967.
2. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследования земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 102, М., 1955.
3. Михелев Д. Ш. Формулы учета боковой рефракции при выполнении геодезических работ в закрытых помещениях. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3, 1967.
4. Урманцев Ф. М. К теории нивелирной рефракции. — Тр. МИИТ, вып. 378, М., 1971.

Работа поступила в редколлегию 17 декабря 1971 года.
Рекомендована ПНИИИС Госстроя СССР.
