

В. М. СЕРДЮКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ СООРУЖЕНИЙ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ, ПО ФОТОТЕОДОЛИТНЫМ СНИМКАМ

К сооружениям, имеющим форму тела вращения, относятся заводские трубы, колонны зданий, различного рода резервуары для хранения жидкости, куполы исторических памятников и т. д. В большинстве таких сооружений ось вращения располагается вертикально. При съемке таких сооружений в случаях, когда оптическая ось фотокамеры не проходит через ось сооружения, возникают перспективные искажения, которые искажают форму сооружений с переменным поперечным сечением. Так, боковые грани конуса получают некоторую бочкообразность, сооружение теряет симметричность. Кроме того, во всех случаях, даже если ось сооружения находится на оптической оси фотокамеры, изображение на снимке не будет соответствовать диаметру поперечного сечения сооружения, а будет всегда меньше и соответствовать лишь сегменту окружности поперечного сечения, что необходимо иметь в виду при определении размеров и форм таких сооружений.

Истинные размеры и форма сооружения могут быть определены измерением снимков на стереокомпараторе или универсальном приборе с графическим или аналитическим способом обработки результатов измерений. Задача может быть решена как по одиночному снимку, так и по снимкам стереопары.

При решении по одиночному снимку, в соответствии с рис. 1, радиус окружности равен

$$R = SO_1 \cdot \sin \beta = D \cdot \sin \beta \quad (1)$$

или

$$R = Y \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \quad (2)$$

Средняя квадратическая ошибка определения радиуса на основании (2) будет

$$m_R = R \sqrt{\left(\frac{m_Y}{Y}\right)^2 + \left(\frac{m_\beta}{\rho \cdot \operatorname{tg} \beta}\right)^2 + \left(\frac{m_\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\rho}\right)^2} \quad (3)$$

или

$$m_R = \sqrt{\left(\frac{R}{Y}\right)^2 \cdot m_Y^2 + \left(\frac{R}{\rho \cdot \operatorname{tg} \beta}\right)^2 \cdot m_\beta^2 + \left(\frac{R \cdot x_0}{f}\right)^2 \cdot m_x^2} \quad (4)$$

При самых неблагоприятных условиях ($m_x = 0,05$ мм, $x_0 = 70$ мм) третий член формулы (4) равен

$$m_{R_x} = R \frac{x_0}{f^2} m_x = R \frac{70}{200^2} \cdot 0,05 = \frac{1}{10000} \cdot R.$$

Пренебрегая такой ошибкой определения размеров сооружения, получаем

$$m_R = \sqrt{\left(\frac{R}{Y}\right)^2 \cdot m_Y^2 + \left(\frac{R}{\rho \cdot \operatorname{tg} \beta}\right)^2 \cdot m_\beta^2}. \quad (5)$$

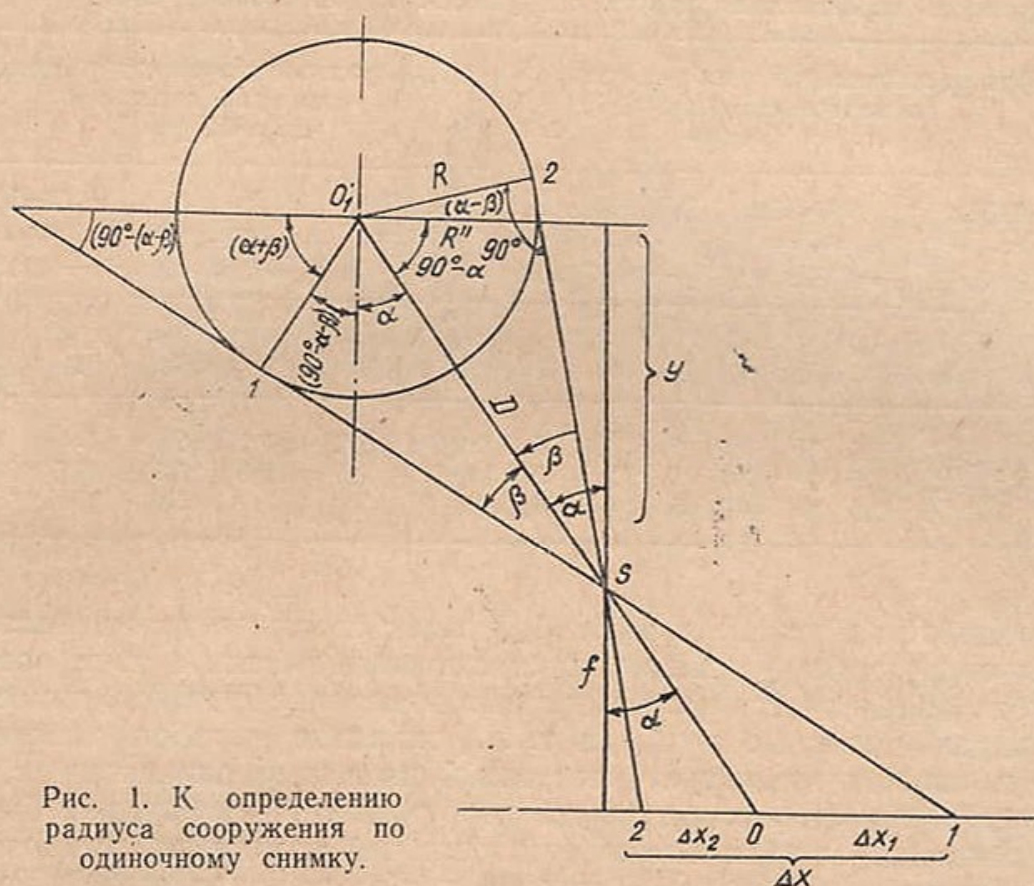


Рис. 1. К определению радиуса сооружения по одиночному снимку.

При подсчете средней квадратической ошибки в формуле (5) можно принять

$$\operatorname{tg} \beta \approx \frac{\Delta x}{2f}$$

и

$$m_\beta \approx \frac{m_{\Delta x}}{2f} \rho,$$

где

$$\Delta x = x_1 - x_2,$$

тогда

$$m_R = \sqrt{\left(\frac{R}{Y}\right)^2 \cdot m_Y^2 + \left(\frac{R}{\Delta x}\right)^2 \cdot m_{\Delta x}^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{Y}\right)^2 \cdot m_Y^2 + \left(\frac{Y}{2f}\right)^2 \cdot m_{\Delta x}^2}. \quad (6)$$

Принимая при контроле элементов внешнего ориентирования и при измерении по двум снимкам $m_{\Delta x} = 0,01$ мм, получим ошибку определения радиуса, вызванную погрешностями измерения снимка:

$$m_{R_{\Delta x}} = \frac{Y}{2f} \cdot m_{\Delta x} = Y \frac{0,01}{2 \cdot 200} = \frac{1}{40000} Y.$$

Подсчитанные по формуле (6) средние квадратические ошибки определения радиуса сооружения для различных случаев приведены в

табл. 1. При расчете принималось, что измерения выполнены по двум снимкам с контролем элементов внешнего ориентирования и измерения отстояния выполнены с точностью $1/2000$ У.

Таблица 1

Точность определения радиуса сооружений по одиночному снимку

У (м)	При расположении изображения в центре снимка $x_{cp} \approx 0$ (мм)									При расположении изображения на краю снимка $x_{cp} = 50$ (мм)					
	$R=0,5$ м $m_{\Delta x} = 0,008$ мм			$R=5$ м $m_{\Delta x} = 0,008$ мм			$R=10$ мм $m_{\Delta x} = 0,009$ мм			$R=0,5$ м $m_{\Delta x} = 0,01$ мм		$R=5$ м $m_{\Delta x} = 0,01$ мм		$R=10$ м $m_{\Delta x} = 0,01$ мм	
	m_{Ry}	$m_{R\Delta x}$	m_R	m_{Ry}	$m_{R\Delta x}$	m_R	m_{Ry}	$m_{R\Delta x}$	m_R	$m_{R\Delta x}$	m_R	$m_{R\Delta x}$	m_R	$m_{R\Delta x}$	m_R
50	0,2	1	1	2,5	1	2,7	5	1,1	5,1	1,2	1,2	1,2	2,8	—	—
100	0,2	2	2	2,5	2	3,2	5	2,2	5,5	2,5	2,5	2,5	3,7	2,5	5,1
200	0,2	4	4	2,5	4	4,7	5	4,5	6,7	5	5	5	5,6	5	7

Расчеты, приведенные в табл. 1, показывают, что при небольших размерах сооружения (колонны, архитектурные детали и т. д.) основная ошибка определяется погрешностями измерения снимков, при средних размерах (дымовые трубы и т. д.) влияние ошибок измерения снимков и ошибок измерения расстояний примерно одинаково, и, наконец, при значительных размерах сооружения (резервуары, башни и т. д.) основная ошибка вызывается ошибкой измерения расстояния.

Вычисления по формуле (1) или (2) требуют знания угла β . Угол β можно найти следующим образом. По измеренным координатам крайних точек сооружения x_1 и x_2 (рис. 1) определяются тангенсы углов α_1 и α_2

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{x_1}{f},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x_2}{f}.$$

По таблицам натуральных значений находятся углы α_1 и α_2 , а угол β будет равен

$$\beta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

По таблицам натуральных значений вычисляют $\sin \beta$ и радиус. Однако такой путь решения можно упростить, если значение угла β определить по формулам (4) и (5) [1]. При определении крена для $\operatorname{tg} \beta$ была выведена формула (15), точность которой недостаточна для вычисления размеров сооружения, когда угол β может достичь $5-6^\circ$. Указанная формула для более точного определения угла β имеет вид

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta x}{2f \left(1 + \frac{x_{cp}^2}{f^2} \right)}. \quad (7)$$

Для использования формулы (7) формулу (2) следует преобразовать, выразив в ней значение синуса через тангенс.

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \operatorname{tg} \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для малых углов (угол β не превышает $5-6^\circ$) можно, ограничиваясь членом первого порядка малости, принять

$$\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{2} \right). \quad (8)$$

Вычисление $\sin \beta$ по формуле (8), как показывают подсчеты для углов $\beta \leq 5-6^\circ$, вносит погрешность в определение $\sin \beta$ меньше $1/200\,000$, а поэтому формулу (8) практически следует считать строгой.

Подсчет точности определения $\operatorname{tg} \beta$ по формуле (7) при расположении изображения на краю снимка ($\alpha = 15^\circ$) приведен в табл. 2.

Таблица 2

Точность определения $\operatorname{tg} \beta$ по формуле (7)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta x}{2f \left(1 + \frac{x_{\text{ср}}^2}{f^2} \right)}$$

Значение угла β	Табличное значение $\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} (\alpha - \beta)$ $\operatorname{tg} \alpha$ $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$	$x_2 = f \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \beta)$ $x_0 = f \cdot \operatorname{tg} \alpha$ $x_1 = f \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta)$	$x_{\text{ср}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\Delta x = x_1 - x_2$	$\operatorname{tg} \beta$ $\delta (\operatorname{tg} \beta)$	$\frac{m_R}{R}$
1°	0,01746	0,24933 0,26795 0,28675	49,866 53,590 57,350	53,608 7,484	0,01746 $\delta = 0$	0
3°	0,05241	0,21256 0,26795 0,32492	42,512 53,590 64,984	53,748 22,472	0,052395 $\delta = 0,000015$	$\frac{1}{3500}$
6°	0,10510	0,15838 0,26795 0,38386	31,676 53,590 76,772	54,224 45,096	0,10506 $\delta = 0,00004$	$\frac{1}{2500}$

При расположении изображения ближе к центру снимка погрешность определения $\operatorname{tg} \beta$, вызванная приближенностью формулы (7), уменьшается и, наконец, при расположении в центре равна нулю. Сравнивая расчеты в табл. 1 и 2, можно прийти к выводу, что только в самом неблагоприятном случае ($R = 10$ м и изображение сооружения на краю снимка) погрешность определения радиуса, вызванная методической погрешностью формулы (8), будет приближаться к погрешности, вызванной ошибками определения отстояния, поэтому формулой (8) можно пользоваться практически во всех случаях.

Таким образом, с учетом (8), формула (2) для определения радиуса сооружения будет иметь вид

$$R = \frac{Y}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{2} \right), \quad (9)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta x}{2f \left(1 + \frac{x_{\text{ср}}^2}{f^2} \right)}.$$

При архитектурных обмерах часто вместо аналитического метода с измерением снимков на стереокомпараторе используется графический метод с измерением элементов здания по составленному фотоплану фасада здания. При составлении фотоплана фасада здания приведение размеров плоских элементов здания к определенному масштабу выполняется обычным способом трансформирования. Если на здании имеются детали, дающие в сечении окружность, то на составленном обычным способом фотоплане фасада здания размеры таких деталей могут иметь значительные искажения.

Чтобы найти на снимке величину искажения изображения диаметра сооружения, обратимся к рис. 1.

Под искажением изображения диаметра будем понимать разность между величиной $\Delta x = x_1 - x_2$ на снимке и $\Delta x^0 = \frac{2RY}{f}$, то есть

$$\delta(\Delta x) = \Delta x - \Delta x^0.$$

Из чертежа

$$\Delta x_2^0 = \Delta x_2 \cos(\alpha - \beta),$$

$$\Delta x_1^0 = \Delta x_1 \cos(\alpha + \beta).$$

Складывая написанные зависимости, получаем

$$\begin{aligned} \Delta x^0 &= \Delta x \cos \alpha \cos \beta - (\Delta x_1 - \Delta x_2) \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \Delta x \cos \alpha \cos \beta - [(x_1 - x_0) - (x_0 - x_2)] \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \Delta x \cos \alpha \cos \beta - (2x_{\text{ср}} - 2x_0) \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \Delta x \cos \alpha \cos \beta - 2\delta x_0 \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (10)$$

Максимальное значение второго члена в выражении (10) не превосходит 0,03 мм, поэтому приближенно

$$\Delta x^0 \approx \Delta x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad (11)$$

откуда искажение изображения будет

$$\delta(\Delta x) = \Delta x - \Delta x^0 = \Delta x(1 - \cos \alpha \cos \beta). \quad (12)$$

Приняв $\alpha_{\text{max}} = 15^\circ$, $\beta_{\text{max}} = 6^\circ$, находим максимальное искажение $\delta(\Delta x) = 45,0(1 - 0,966 \cdot 0,995) = 1,75$ мм.

Так, при отстоянии $Y = 200$ м получаем погрешность в определении диаметра, равную $\sim 1,7$ м.

При увеличении снимков фасадов зданий соответственно увеличиваются и искажения. Так, при коэффициенте трансформирования $K = 4$ искажение диаметра на фотоплане достигает 7 мм, поэтому при составлении фотопланов зданий, предназначенных для измерительных целей, с этими искажениями следует считаться.

Одним из простейших способов определения истинных размеров является графический способ, методика применения которого показана на рис. 1. При составлении фотопланов для получения фотоизобра-

жения, соответствующего истинному диаметру сооружения, необходимо, как видно из рис. 1, трансформировать снимок.

При трансформировании снимков по установочным данным (углу α и отстоянию Y) размер изображения будет соответствовать хорде окружности, поэтому трансформированное изображение следует увеличить в соответствии с известной формулой, вытекающей из соотношения между диаметром d_t и хордой d окружности.

Поправка в трансформированное изображение находится по формуле

$$\Delta d = d \left(\frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right), \quad (13)$$

которую с достаточной для практических целей точностью можно после ряда преобразований привести к виду

$$\Delta d = \frac{\Delta x \cdot K}{8} \left(\frac{\Delta x}{f} \right)^2,$$

где d — видимый диаметр трансформированного изображения;

Δx — изображение диаметра на снимке.

Подсчитанные по формуле поправки Δd для различных случаев приведены в табл. 3. При расчете принято $f=200$ мм.

Таблица 3

Поправки в трансформированное изображение
для перехода от хорды к диаметру

Величина изображения на снимке (мм)	K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_t (мм)	Δd (мм)	d_t (мм)	Δd (мм)	d_t (мм)	Δd (мм)	d_t (мм)	Δd (мм)
50	100	0,8	150	1,2	200	1,6	250	2,0
40	80	0,4	120	0,6	160	0,8	200	1,0
30	60	0,2	90	0,3	120	0,3	150	0,4
20	40	0,0	60	0,0	80	0,1	100	0,1

Данные табл. 3 показывают, что поправку Δd в трансформированное изображение следует вводить лишь при размерах изображения на фототеодолитном снимке ($f=200$ мм), больших 30 мм.

Недостатком решения задачи по одиночному снимку являются часто возникающие затруднения при определении расстояния до оси сооружения, и, кроме того, отсутствие возможности определить размеры и форму сооружений, имеющих в поперечном сечении криволинейную форму, отличную от окружности.

По снимкам стереопары определение радиуса сооружения может быть выполнено различными способами, рассматриваемыми ниже.

1. Снимки стереопары используются лишь для определения отстояния Y_0 до оси сооружения O (рис. 2), а задача определения радиуса сооружения решается по одиночному снимку, как рассматривалось выше. Наличие двух снимков позволяет решить задачу дважды и тем самым повысить точность.

При нормальном случае съемки отстояние определяется по формуле

$$Y_0 = B \cdot \frac{f}{p_0} = B \frac{f}{x_0 - x_0'}, \quad (14)$$

где x_0, x_0' — координаты оси сооружения на левом и правом снимке. соответственно.

Координаты оси сооружения определяются по формуле (11) [1]

$$x_0 = x_{cp} - \delta x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_0 \Delta x}{2f} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (15)$$

При вычислениях, когда величина Δx не превышает 10—15 мм, в целях упрощения вычисления δx_0 по формуле (15) в числителе вместо x_0 берется x_{cp} .

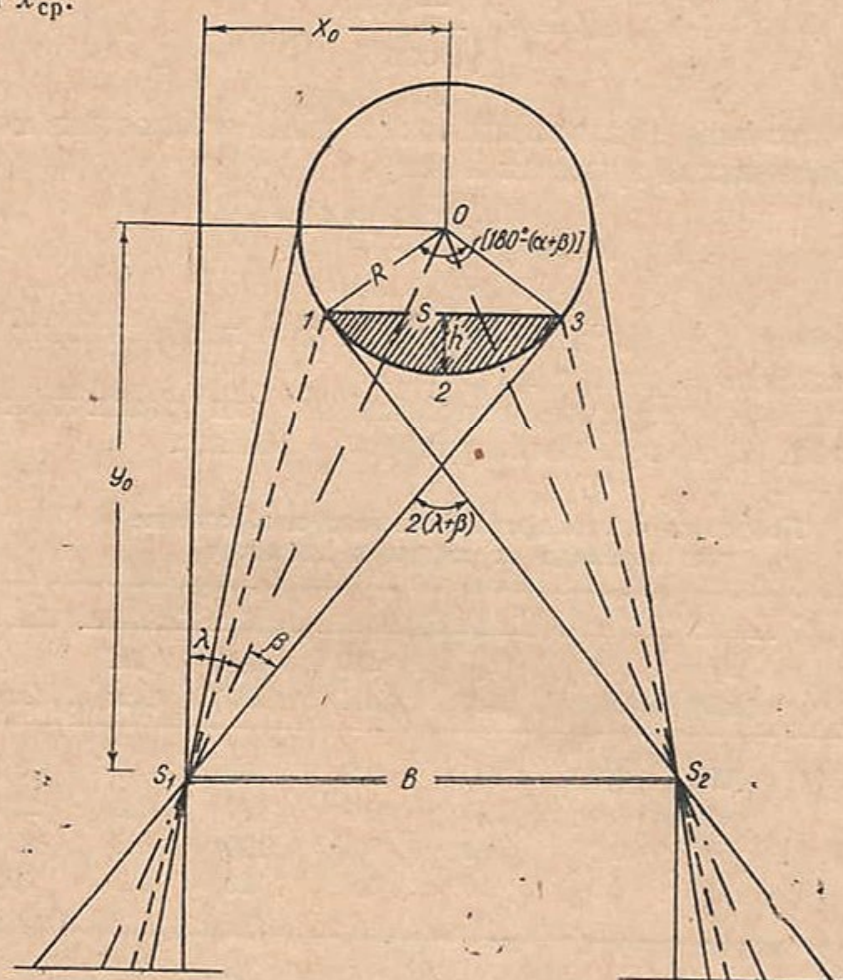


Рис. 2. Определение размеров сооружений, имеющих в поперечном сечении окружность.

При вычислении радиусов крупных сооружений, когда $\Delta x = x_1 - x_2$ может достигать 30—50 мм, поправка δx_0 достигает 0,05 мм и замена x_0 на x_{cp} сможет привести к погрешности определения координаты оси сооружения x_0 до 0,005 мм, поэтому при особо точных работах следует вводить соответствующую поправку.

Формулу (15) преобразуем так:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{cp} - \frac{x_0 \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta = x_{cp} - \frac{(x_{cp} - \delta x_0) \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta = \\ &= x_{cp} - \frac{x_{cp} \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta + \frac{\delta x_0 \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta = x_{cp} - \delta x_0 - \frac{\delta x_0 \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta = \\ &= x_{cp} - \delta x_0 + \frac{\delta x_0}{x_{cp}} \frac{x_{cp} \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta = x_{cp} - \delta x_0 + \frac{\delta x_0}{x_{cp}} \cdot \delta x_0 = \\ &= x_{cp} - \delta x_0 + \frac{(\delta x_0)^2}{x_{cp}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\delta x_0 = \frac{x_{cp} \cdot \Delta x}{2f} \operatorname{tg} \beta$. Или с учетом (7)

$$\delta x_0 = \frac{\Delta x^2 x_{cp}}{4f^2 \left(1 + \frac{x_{cp}^2}{f^2}\right)}. \quad (17)$$

Средняя квадратическая погрешность определения поправки δx_0 найдется по формуле (21) [1]. Принимая $x_{cp} = 50$ мм, $\Delta x = 50$ мм, $f = 200$ мм, получаем

$$m_{\delta x_0} \approx m_x \frac{\Delta x \cdot x_{cp}}{f^2 \sqrt{2}} = m_x \frac{50 \cdot 50}{200 \cdot 200 \cdot \sqrt{2}} \approx \frac{1}{20} m_x.$$

Поэтому можно считать, что

$$m_{x_0} = \sqrt{\frac{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}{4}} = \sqrt{\frac{2m_x^2}{4}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}}. \quad (18)$$

Средняя квадратическая ошибка определения продольного параллакса в формуле (14) будет

$$m_p = \sqrt{m_{x_0}^2 + m_{x_0'}^2} = m_{x_0} \sqrt{2} = m_x. \quad (19)$$

С учетом (19) средняя квадратическая ошибка отстояния будет определяться по формуле

$$m_Y = Y \sqrt{\left(\frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{m_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{m_p}{p}\right)^2} \approx Y \sqrt{\left(\frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{m_x}{p}\right)^2}. \quad (20)$$

При контроле элементов внешнего ориентирования α и измерениях по двум парам снимков можно принять $m_x = 0,01$ мм, поэтому при $p = 60$ мм

$$m_Y = Y \sqrt{\left(\frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{1}{6000}\right)^2}. \quad (21)$$

Сравнивая выражение (21) с данными табл. 1, видим, что при определении радиуса сравнительно небольших объектов ($R = 1-2$ м) и измерении базиса с точностью порядка $1/2000$ погрешностью определения отстояния можно пренебречь.

При значительных размерах сооружения ($R = 5-10$ м) и необходимости повысить точность определения радиуса следует соответственно повысить точность измерения базиса.

Таким образом, при нормальном случае съемки и рассматриваемой выше методике определения отстояния Y_0 до оси сооружения радиус определяется со средней квадратической ошибкой

$$\begin{aligned} m_R &= \sqrt{R^2 \left[\left(\frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{m_x}{p}\right)^2 \right] + \left(\frac{Y}{2f}\right)^2 m_{\Delta x}^2} = \\ &= \sqrt{R^2 \left[\left(\frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{m_x}{p}\right)^2 \right] + \left(\frac{Y}{2f}\right)^2 m_x^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подсчитанные по формуле (22) средние квадратические ошибки определения радиуса приведены в табл. 4. При расчете табл. 4 взяты данные табл. 1 и принято, что относительная точность измерения ба-

зиса соответствует относительной точности измерения продольного параллакса $\frac{m_B}{B} = \frac{m_x}{p} = \frac{1}{6000}$, при этих условиях $\frac{m_Y}{Y} = \frac{1}{4000}$.

Таблица 4

Точность определения радиуса сооружений по снимкам стереопары при нормальном и конвергентном случаях съемки (способ 1)

Y (м)	Нормальный случай съемки B=0,3 Y									Конвергентный случай съемки $\gamma=90^\circ$ B=2Y					
	R=0,5 м $m_{\Delta x}=0,01$ м			R=5 м $m_{\Delta x}=0,1$ м			R=10 м $m_{\Delta x}=0,01$ м			R=0,5 м $m_{\Delta x}=0,02$ мм		R=5 м $m_{\Delta x}=0,02$ мм		R=10 м $m_{\Delta x}=0,02$ мм	
	m_{RB}	$m_{R\Delta x}$	m_R	m_{RB}	$m_{R\Delta x}$	m_R	m_{RB}	$m_{R\Delta x}$	m_R	m_{RB}	m_R	m_{RB}	m_R	m_{RB}	m_R
50	0,1	0,9	1	1,2	0,9	1,5	2,5	0,9	2,7	0	0,9	0,4	1,0	0,7	1,1
100	0,1	1,8	1,8	1,2	1,8	2,1	2,2	1,8	3,0	0	1,8	0,4	1,9	0,7	1,9
200	0,1	3,5	3,5	1,2	3,5	3,7	2,5	3,5	4,3	0	3,5	0,4	3,5	0,7	3,6

Таким образом, сравнивая данные табл. 1 и 4, видим, что по снимкам стереопары и при нормальном случае съемки точность определения радиуса повышается примерно в 1,5—2 раза.

При конвергентной съемке точность определения трансформированных значений абсцисс и продольных параллаксов во многом зависит от положения изображения на снимке.

Точность определения продольного параллакса при $\gamma=90^\circ$ равна $m_{p_t} \approx 2m_p$, поэтому при $\gamma=90^\circ$, $B=2Y$, $p_t=400$ мм и $m_{x_t}=2m_x=0,02$ мм получаем

$$\frac{m_Y}{Y} = \frac{m_{x_t}}{p_t} = \frac{0,02}{400} = \frac{1}{20000}.$$

Для реализации найденной точности определения отстояния потребуем, чтобы базис измерялся с такой же точностью. С учетом этого требования подсчитанные по формуле (22) ошибки определения радиуса при конвергентной съемке ($\gamma=90^\circ$) приведены в табл. 4.

Сравнивая данные табл. 4 для нормального и конвергентного случаев съемки, убеждаемся, что конвергентная съемка ведет к некоторому повышению точности определения радиуса только при больших размерах ($R \geq 10$ м) и малых отстояниях ($Y < 100$ м), когда на точность определения радиуса оказывает сравнительно заметное влияние точность определения отстояния. Поэтому применение конвергентной съемки при данном способе определения радиуса, учитывая сравнительную сложность вычислений при камеральной обработке результатов, целесообразно только при повышенных требованиях к точности определения радиуса, малых отстояниях ($Y < 100$ м) и больших размерах сооружения ($R \geq 8-10$ м).

При конвергентной съемке отстояния Y_0 может быть определено вычислительным методом, с этой целью формула (14) может быть приведена к виду

$$Y_0 = \frac{B}{\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} \lambda'}, \quad (23)$$

где $\lambda = \beta - \alpha$, $\lambda = \alpha' - \beta'$;

α, α' — углы скоса левой и правой фотокамеры соответственно.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0}{f},$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{x_0'}{f}.$$

Отстояние может быть вычислено также по формуле для конвергентного случая съемки и по формуле (14) для нормального случая, в последнем в знаменателе следует брать трансформированное значение абсцисс.

2. По снимкам стереопары радиус определяется так же, как разность отстояний оси сооружения до ближайшей точки (точка a на рис. 2). В этом случае отстояние Y_0 определяется по одному из способов, изложенных выше, и радиус будет равен

$$\begin{aligned} R = Y_0 - Y_a = \Delta Y &= B \frac{f}{x_0 - x_0'} - B \frac{f}{p_a} = B \frac{f}{p_0} - B \frac{f}{p_a} = \\ &= Bf \left(\frac{p_a - p_0}{p_a \cdot p_0} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Средняя квадратическая ошибка определения радиуса по разности отстояний в соответствии с (24) будет

$$m_R = \sqrt{\left(R \frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(R \frac{m_f}{f}\right)^2 + \left(Y_a \frac{m_{p_a}}{p_a}\right)^2 + \left(Y_0 \frac{m_{p_0}}{p_0}\right)^2}.$$

Пренебрегая погрешностью фокусного расстояния и считая $\frac{Y_a}{p_a} \approx \frac{Y_0}{p_0} \approx \frac{Y}{p}$, $m_{p_a} = m_{p_0} = m_p$, получаем

$$m_R = \sqrt{\left(R \frac{m_B}{B}\right)^2 + 2 \left(Y \frac{m_p}{p}\right)^2}. \quad (25)$$

Очевидно, формулы (24) — (25) справедливы как для нормального, так и для конвергентного случая съемки, в последнем в формулах следует брать трансформированные значения продольного параллакса p_t и m_{p_t} . Подсчитанные по формуле (25) средние квадратические ошибки определения радиуса при нормальном и конвергентном случаях съемки приведены в табл. 5. При расчете принято

$$\frac{m_B}{B} = \frac{1}{6000}; \quad \frac{m_p}{p} = \frac{1}{6000}; \quad \frac{m_{p_t}}{p_t} = \frac{1}{20000}. \quad (26)$$

Сравнение данных табл. 5 с табл. 1 и 4 показывает, что рассматриваемый способ по точности значительно уступает предыдущим. Однако камеральные работы несколько проще. Поэтому этот способ целесообразно применять в случаях, когда требования к точности снижены.

Повышение точности в рассматриваемом способе возможно при дополнительных определениях радиуса с использованием точек $a_1, a_2, \dots$ (рис. 2). При использовании дополнительных точек возрастает слож-

Точность определения радиуса сооружений по снимкам стереопары при нормальном и конвергентном случаях съемки (способ 2)

Y (м)	Нормальный случай съемки B=0,3 Y									Конвергентный случай съемки $\gamma=90^\circ$, B=2Y					
	R=0,5 м m _p =0,01 мм			R=5 м m _p =0,01 мм			R=10 м m _p =0,01 мм			P=0,5 мм m _{p_t} =0,02 мм		R=5 м m _{p_t} =0,02 мм		R=10 м m _{p_t} =0,02 мм	
	m _{R_B} (мм)	m _{R_p} (мм)	m _R (мм)	m _{R_B} (мм)	m _{R_p} (мм)	m _R (мм)	m _{R_B} (мм)	m _{R_p} (мм)	m _R (мм)	m _{R_p} (мм)	m _R (мм)	m _{R_p} (мм)	m _R (мм)	m _{R_p} (мм)	m _R (мм)
50	0,1	12	12	0,8	12	12	1,7	12	12	3,5	3,5	3,5	3,6	3,5	4
100	0,1	24	24	0,8	24	24	1,7	24	24	7	7	7	7	7	7
200	0,1	47	47	0,8	47	47	1,7	47	47	14	14	14	14	14	14

ность камеральных работ, поскольку радиус в этом случае будет определяться по формуле

$$R = \sqrt{\Delta Y^2 + \Delta X^2}, \quad (27)$$

где ΔY , ΔX — разность отстояний и абсцисс между осью сооружения и точкам $a_1, a_2 \dots$

Для определения разности абсцисс $\Delta X_{a_1} = X_0 - X_{a_1}$ необходимо определить абсциссу оси сооружения X_0 , которая может быть найдена численным методом или по стереофотограмметрической формуле. Таким образом, возникает необходимость дополнительного определения абсцисс точек и радиуса по формуле (27). Средняя квадратическая ошибка определения радиуса с учетом дополнительных измерений по точкам $a_1, a_2 \dots$ будет

$$m_R = \sqrt{\left(R \frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(Y \frac{m_p}{p}\right)^2}, \quad (28)$$

где n — количество используемых точек. Формула (28) показывает, что точность при использовании дополнительных точек может повыситься максимально в 1,5 раза, поэтому нецелесообразно брать количество дополнительных точек больше двух—трех.

3. Стереофотограмметрический способ с аналитической обработкой результатов измерений заключается в стереофотограмметрическом определении координат точек по поверхности сооружения (точки a_1, a_2, a_3 на рис. 3) и определении радиуса окружности, проходящей через эти точки.

Общее уравнение окружности в прямоугольных координатах, как известно, имеет вид

$$R^2 = (X_0 - X)^2 + (Y_0 - Y)^2, \quad (29)$$

где X_0, Y_0 — координаты оси сооружения;

X, Y — координаты текущей точки окружности.

Для трех точек окружности будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= (X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2, \\ R^2 &= (X_0 - X_2)^2 + (Y_0 - Y_2)^2, \\ R^2 &= (X_0 - X_3)^2 + (Y_0 - Y_3)^2. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Решая полученную систему уравнений, найдем координаты оси сооружения

$$Y_0 = \frac{(X_2 - X_1)(X_3^2 - X_1^2 + Y_3^2 - Y_1^2) - (X_3 - X_1)(X_2^2 - X_1^2 + Y_2^2 - Y_1^2)}{2[(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)]}, \quad (31)$$

$$X_0 = \frac{(Y_2 - Y_1)(X_3^2 - X_1^2 + Y_3^2 - Y_1^2) - (Y_3 - Y_1)(X_2^2 - X_1^2 + Y_2^2 - Y_1^2)}{2[(Y_2 - Y_1)(X_3 - X_1) - (Y_3 - Y_1)(X_2 - X_1)]}. \quad (32)$$

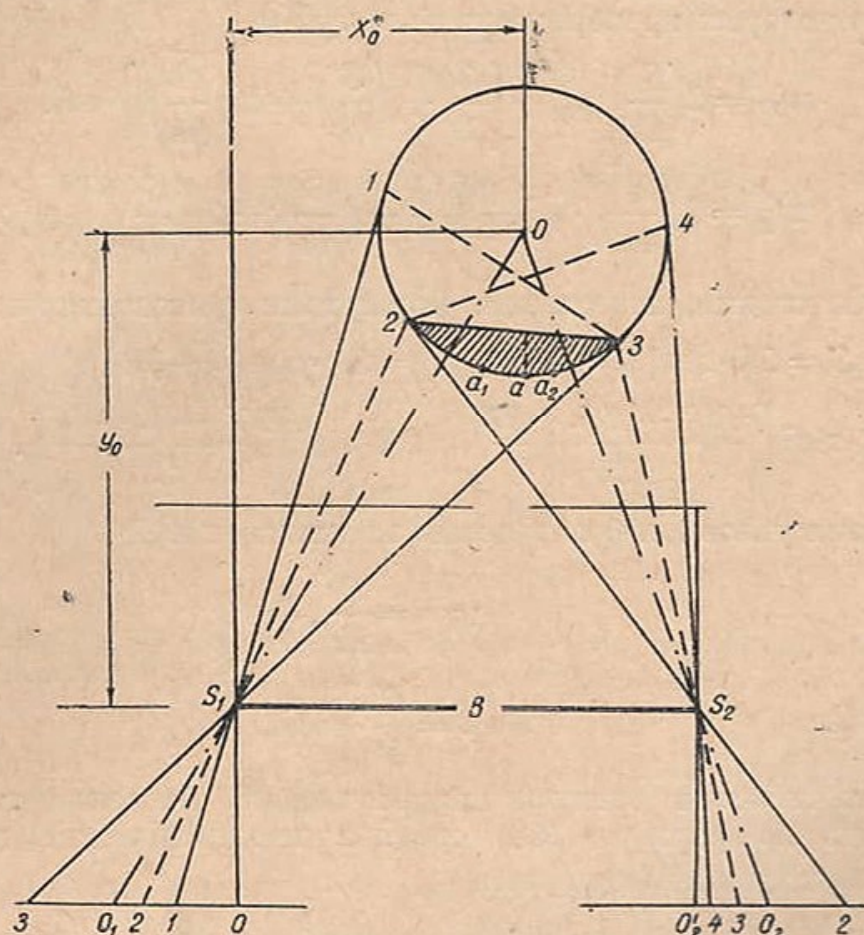


Рис. 3. Определение радиуса стереофотограмметрическим способом.

Подставляя Y_0 , X_0 в одно из уравнений (30), найдем радиус R . Очевидно, наиболее простое решение будет при использовании второго уравнения (30), с условием, что точка a_2 (рис. 3) имеет минимальное значение отстояния (или максимальный продольный параллакс). В этом случае

$$R = Y_0 - Y_2. \quad (33)$$

Средняя квадратическая погрешность определения радиуса стереофотограмметрическим способом в соответствии с (29) будет

$$m_R = \frac{\sqrt{(X_0 - X)^2 \cdot m_{(X_0 - X)}^2 + (Y_0 - Y)^2 \cdot m_{(Y_0 - Y)}^2}}{R}. \quad (34)$$

При определении радиуса по формуле (33)

$$m_R = m_{(Y_0 - Y_2)}. \quad (35)$$

Очевидно, как значение радиуса R , при определении по любому из уравнений (30), так и значение средней квадратической погрешно-

сти по формуле (34) или (35) будет одинаково. Найдем среднюю квадратическую погрешность определения радиуса с использованием формулы (35).

Радиус в соответствии с (33) будет

$$R = Y_0 - Y_2 = \frac{(X_2 - X_1)(X_3^2 - X_1^2 + Y_3^2 - Y_1^2) - (X_3 - X_1)(X_2^2 - X_1^2 + Y_2^2 - Y_1^2)}{2[(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)]} - Y_2. \quad (36)$$

Дифференцируя выражение (36) по переменным $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$, после некоторых преобразований получим

$$m_{Y_0}^2 = 2 \left(\frac{S}{4h} \right)^2 m_X^2 + \left[\frac{3}{8} + \left(\frac{S}{4h} \right)^2 + 2 \left(\frac{S}{4h} \right)^4 \right] \cdot m_{Y'}^2, \quad (37)$$

$$m_R^2 = 2 \left(\frac{S}{4h} \right)^2 \cdot m_X^2 + \left[\frac{11}{8} + \left(\frac{S}{4h} \right)^2 + 2 \left(\frac{S}{4h} \right)^4 \right] \cdot m_{Y'}^2, \quad (38)$$

где в соответствии с известными формулами тригонометрии

$$\left. \begin{aligned} S &= 2R \cdot \sin [90^\circ - (\lambda + \beta)] = 2R \cdot \cos (\lambda + \beta), \\ h &= 2R \cdot \sin^2 \left[\frac{180^\circ - 2(\lambda + \beta)}{2} \right] = 2R \cdot \sin^2 \left[\frac{90^\circ - (\lambda + \beta)}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Значения углов λ и β определим из зависимостей

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda &= \frac{B}{2Y}, \\ \sin \beta &= \frac{R}{Y} \cdot \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

При вычислении средней квадратической погрешности определения радиуса по формуле (38) средние квадратические погрешности m_X и $m_{Y'}$ находим по формулам

$$m_X^2 = \left(S \frac{m_B}{B} \right)^2 + \left(X \frac{m_x}{x} \right)^2 + \left(X \frac{m_p}{p} \right)^2, \quad (41)$$

$$m_{Y'}^2 = \left(h \frac{m_B}{B} \right)^2 + \left(Y \frac{m_f}{f} \right)^2 + \left(Y \frac{m_p}{p} \right)^2. \quad (42)$$

Точность определения ординаты оси и радиуса сооружения, подсчитанная в соответствии с формулами (37) — (42) для нормального случая съемки, приведена в табл. 6.

Таблица 6

Точность определения ординаты оси и радиуса сооружения стереофотограмметрическим способом при нормальном случае съемки

$$B = 0,3 Y \quad m_x = m_p = 1,01 \text{ мм}$$

Y (м)	R=0,5 м		R=1 м		R=2 м		R=5 м		R=10 м	
	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)
50	12	12	12	12	12	12	13	12	14	13
100	24	23	24	24	24	24	25	24	26	25
200	48	46	48	47	49	47	49	47	50	50

Данные табл. 6 показывают, что точность определения радиуса соответствует точности определения ординаты оси сооружения.

Сравнивая данные табл. 6 и таблиц 1, 4, 5 видим, что стереофотограмметрический способ определения радиуса при нормальном случае съемки по точности примерно равноценен определению радиуса по снимкам стереопары вторым способом (ординаты оси Y_0 определяется фотограмметрическим способом, ордината ближайшей точки — стереофотограмметрическим) и значительно уступает другим способам. Кроме того, вычисления при данном способе значительно сложнее, и, следовательно, стереофотограмметрический способ определения радиуса сооружения с аналитической обработкой результатов измерений мало целесообразен. Очевидно, его следует применять лишь в тех случаях, когда на снимках не изобразились грани сооружения и нельзя использовать более точные способы.

В табл. 7 подсчитана точность определения ординаты оси сооружения и радиуса при конвергентной съемке по формулам (31) и (36). При подсчете принято

$$\gamma = 90^\circ, B = 2Y, \gamma = 45^\circ,$$

$$\beta = 0,7 \frac{R}{Y} \rho, p_t = 400 \text{ мм}, X = \frac{B}{2}, x_t = \frac{p}{2} = 200 \text{ мм},$$

$$\frac{m_B}{B} = \frac{1}{6000}, m_{p_t} = 0,02 \text{ мм}, m_{x_t} = 0,02 \text{ мм}.$$

Таблица 7

Точность определения ординаты и радиуса сооружения стереофотограмметрическим способом при конвергентном случае съемки

$$m_{x_t} = m_{p_t} = 0,02 \text{ мм}.$$

Y (м)	$R=0,5 \text{ м}$		$R=1 \text{ м}$		$R=2 \text{ м}$		$R=5 \text{ м}$		$R=10 \text{ м}$	
	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)	m_{Y_0} (мм)	m_R (мм)
50	24	8	25	9	26	9	28	9	34	12
100	47	16	48	17	49	17	50	17	56	19
200	94	32	95	33	96	33	98	34	101	35

Сравнивая данные табл. 7 и табл. 1, 4, 5, 6, можно сделать вывод, что определение радиуса сооружения по координатам точек окружности при конвергентном случае съемки по точности практически соответствует стереофотограмметрическому способу при нормальном случае съемки (табл. 6) и значительно уступает другим способам.

На рис. 4 представлен сравнительный график точности определения радиуса сооружения для различных случаев съемки при отстоянии $Y=50 \text{ м}$.

График наглядно показывает, что наибольшей точностью обладает фотограмметрический способ стереопары снимков, когда отстояние от оси сооружения определяется по данным монокулярного измерения с помощью стереофотограмметрической формулы.

В этом способе точность при конвергентном и нормальном случаях съемки отличается сравнительно мало, поэтому, учитывая более простой способ математической обработки результатов при нормальном случае съемки, последнему следует отдать предпочтение.

Радиус сооружения, естественно, может быть определен при обработке снимков на любом универсальном стереофотограмметрическом приборе, имеющем систему осей или возможность переключения их для обработки фототеодолитных снимков. В этом случае радиус определится путем графических построений. Точность определения радиуса мо-

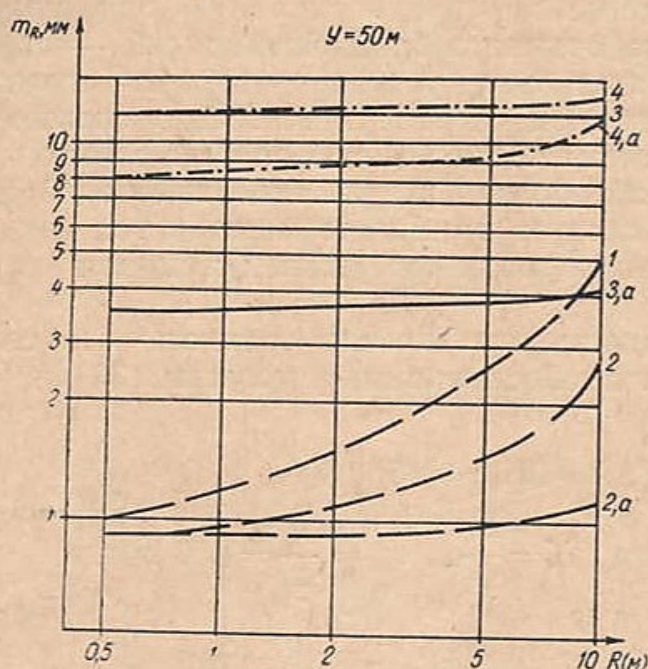


Рис. 4. Точность определения радиуса сооружения различными способами:

1 — фотограмметрическим (табл. 1); 2 — фотограмметрическим по стереопаре снимков при нормальном случае съемки (табл. 4); 2, a — то же при конвергентной съемке (табл. 4); 3 — комбинированный способ при нормальном случае съемки (табл. 5); 3, a — то же при конвергентном случае съемки (табл. 5); 4 — стереофотограмметрический способ при нормальном случае съемки (табл. 6); 4, a — то же при конвергентном случае съемки (табл. 7).

жет быть оценена по формулам стереофотограмметрического способа с учетом ошибок графических построений. При достаточном масштабе построения графического плана точность определения радиуса при обработке снимков на универсальном приборе примерно в 1,5 раза ниже приведенных в табл. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюков В. М. Определение крена высоких сооружений фотограмметрическим способом. Межведомств. республ. научно-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 9. Изд-во Львовского ун-та, 1969.

Работа поступила
11 октября 1968 года.