УДК 528.236

В. Г. КИРИЛЛОВ

УГЛОВЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Определение вида линейного преобразования пространственных прямоугольных координат требует развития теории искажений, хорошо разработанной в математической картографии для изображений на плоскости и на пространство трех измерений [2].

В данной статье рассмотрено определение искажений направлений, углов при преобразовании прямоугольных координат.

Решая многие задачи спутниковой геодезии, используют направляющие косинусы $m=\cos\alpha$, $n=\cos\beta$, $p=\cos\gamma$. Поэтому при анализе искажений углов α, β и γ удобно использовать изменения их косинусов, т. е. исследовать функции

$$f=\cos\chi'-\cos\chi, \tag{1}$$

где $\cos\chi'$ и $\cos\chi$ — новый и старый направляюшие косинусы.

Запишем выражение для направляющего косинуса:

$$\cos\alpha_{ij}=\frac{\Delta X^{ij}}{\sqrt{\Delta X_{ij}^2+\Delta Y_{ij}^2+\Delta Z_{ij}^2}}=\frac{\Delta X_{ij}}{S_{ij}}, \tag{2}$$

где ΔX_{ij}, ΔY_{ij}, ΔZ_{ij} — приращения координат по линии S_{ij}, соединяющей пункты P_i и P_j.

Частные производные $\cos\alpha_{ij}$ по приращениям координат имеют вид:

$$\frac{\partial\cos\alpha_{ij}}{\partial\Delta X_{ij}}=\frac{\sin^2\alpha_{ij}}{S_{ij}};\quad \frac{\partial\cos\alpha_{ij}}{\partial\Delta Y_{ij}}=-\frac{\cos\alpha_{ij}\cos\beta_{ij}}{S_{ij}};$$

$$\frac{\partial\cos\alpha_{ij}}{\partial\Delta Z_{ij}}=-\frac{\cos\alpha_{ij}\cos\gamma_{ij}}{S_{ij}}. \tag{3}$$

Используя выражения (3), записываем формулу для искажений направляющего косинуса

$$d\cos\alpha_{ij}=\frac{\cos\alpha_{ij}}{S_{ij}}(\sin\alpha_{ij}\operatorname{tg}\alpha_{ij}\,d\Delta X_{ij}-\cos\beta_{ij}\,d\Delta Y_{ij}-\cos\gamma_{ij}\,d\Delta Z_{ij}). \tag{4}$$

Для других направляющих косинусов аналогично можно получить формулы

$$d\cos\beta_{ij}=\frac{\cos\beta_{ij}}{S_{ij}}(-\cos\alpha_{ij}\,d\Delta X_{ij}+\sin\beta_{ij}\operatorname{tg}\beta_{ij}\,d\Delta Y_{ij}-\cos\gamma_{ij}\,d\Delta Z_{ij});$$

$$d\cos\gamma_{ij}=\frac{\cos\gamma_{ij}}{S_{ij}}(-\cos\alpha_{ij}\,d\Delta X_{ij}-\cos\beta_{ij}\,d\Delta Y_{ij}+\sin\gamma_{ij}\operatorname{tg}\gamma_{ij}\,d\Delta Z_{ij}). \tag{5}$$

Формулы (4)—(5) позволяют перевычислить направляющие косинусы, если известны сдвиги по осям координат.

В случае, когда углы α, β и γ изменяются незначительно, например при связи квазигеоцентрических систем координат, формулы (4)—(5) можно записать следующим образом:

$$d\alpha_{ij} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_{ij}}{S_{ij}}\left(-\sin\alpha_{ij}\operatorname{tg}\alpha_{jj}\, d\Delta X_{ij} + \cos\beta_{ij}\, d\Delta Y_{ij} + \cos\gamma_{ij}\, d\Delta Z_{ij}\right);$$

$$d\beta_{ij} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_{ij}}{S_{ij}}\left(\cos\alpha_{ij}\, d\Delta X_{ij} - \sin\beta_{ij}\operatorname{tg}\beta_{ij}\, d\Delta Y_{ij} + \cos\gamma_{ij}\, d\Delta Z_{ij}\right); \quad (6)$$

$$d\gamma_{ij} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma_{ij}}{S_{ij}}\left(\cos\alpha_{ij}\, d\Delta X_{ij} + \cos\beta_{ij}\, d\Delta Y_{ij} - \sin\gamma_{ij}\operatorname{tg}\gamma_{ij}\, d\Delta Z_{ij}\right).$$

Если известны изменения длин dS, то формулы (4)—(5) упрощаются. В работе [2] показано, что

$$dS = \cos\alpha_{ij}\, d\Delta X_{ij} + \cos\beta_{ij}\, d\Delta Y_{ij} + \cos\gamma_{ij}\, d\Delta Z_{ij}. \quad (7)$$

С учетом уравнения (7) формулы (4)—(5) примут вид:

$$d\cos\alpha_{ij} = \frac{d\Delta X_{ij} - dS_{ij}\cos\alpha_{ij}}{S_{ij}}; \quad d\cos\beta_{ij} = \frac{d\Delta Y_{ij} - dS_{ij}\cos\beta_{ij}}{S_{ij}};$$

$$d\cos\gamma_{ij} = \frac{d\Delta Z_{ij} - dS_{ij}\cos\gamma_{ij}}{S_{ij}}. \quad (8)$$

Для изометрических преобразований запишем формулы (6) с учетом (7):

$$d\alpha''_{ij} = \frac{dX_j - dX_i}{S_{ij}\sin\alpha_{ij}}\rho''; \quad d\beta''_{ij} = \frac{dY_j - dY_i}{S_{ij}\sin\beta_{ij}}\rho'';$$

$$d\gamma''_{ij} = \frac{dZ_j - dZ_i}{S_{ij}\sin\gamma_{ij}}\rho'', \quad (9)$$

где $dX_i = X_i' - X_i$; $dY_j = Y_j' - Y_j$ и т. д.

Угол между двумя направлениями можно вычислить по известной формуле

$$\cos\theta_{ijk} = \cos\alpha_{ij}\cos\alpha_{kj} + \cos\beta_{ij}\cos\beta_{kj} + \cos\gamma_{ij}\cos\gamma_{kj}. \quad (10)$$

Определим искажения этих косинусов:

$$d\cos\theta_{ijk} = \cos\alpha_{ij}\, d\cos\alpha_{kj} + \cos\alpha_{kj}\, d\cos\alpha_{ij} + \cos\beta_{ij}\, d\cos\beta_{kj} +$$
$$+ \cos\beta_{kj}\, d\cos\beta_{ij} + \cos\gamma_{ij}\, d\cos\gamma_{kj} + \cos\gamma_{kj}\, d\cos\gamma_{ij}. \quad (11)$$

После преобразования получим

$$d\cos\theta_{ijk} = \frac{d\Delta X_{ij}}{S_{ij}}\left(\cos\alpha_{jk} - \cos\theta_{ijk}\cos\alpha_{ji}\right) +$$

$$+\frac{d\Delta X_{kj}}{S_{kj}}(\cos\alpha_{jk}-\cos\theta_{ijk}\cos\alpha_{jk})+\frac{d\Delta Y_{ij}}{S_{ij}}(\cos\beta_{jk}-$$

$$-\cos\theta_{ijk}\cos\beta_{ji})+\frac{d\Delta Y_{jk}}{S_{jk}}(\cos\beta_{ij}-\cos\theta_{ijk}\cos\beta_{jk})+$$

$$+\frac{d\Delta Z_{ij}}{S_{ij}}(\cos\gamma_{jk}-\cos\theta_{ijk}\cos\gamma_{ji})+\frac{d\Delta Z_{jk}}{S_{kj}}(\cos\gamma_{ji}-\cos\theta_{ijk}\cos\gamma_{jk}). \qquad (12)$$

С учетом (7) запишем формулу (12) в виде

$$d\cos\theta_{ijk}=\frac{\Delta X_{ij}\,d\Delta X_{kj}+\Delta X_{kj}\,d\Delta X_{ij}+\Delta Y_{ij}\,d\Delta Y_{kj}+\Delta Y_{kj}\,d\Delta Y_{ij}}{S_{ij}\cdot S_{kj}}+$$

$$+\frac{\Delta Z_{ij}\,d\Delta Z_{kj}+\Delta Z_{kj}\,d\Delta Z_{ij}}{S_{ij}\cdot S_{kj}}-\left(\frac{dS_{ij}}{S_{ij}}+\frac{dS_{kj}}{S_{kj}}\right)\cos\theta_{ijk}. \qquad (13)$$

Если различия между углами Θ_{ijk} незначительны, то из (13) получается формула проф. А. В. Буткевича [1]:

$$d\theta_{ijk}=\operatorname{ctg}\theta_{ijk}\left(\frac{dS_{ij}}{S_{ij}}+\frac{dS_{kj}}{S_{kj}}\right)-\frac{d\Delta X_{ij}\,\Delta X_{kj}+d\Delta X_{kj}\,\Delta X_{ij}}{S_{ij}\cdot S_{kj}\cdot\sin\theta_{ijk}}-$$

$$-\frac{d\Delta Y_{ij}\,\Delta Y_{ki}+d\Delta Y_{kj}\,\Delta Y_{ij}+d\Delta Z_{ij}\,\Delta Z_{kj}+d\Delta Z_{kj}\,\Delta Z_{ij}}{S_{ij}\,S_{kj}\sin\theta_{ijk}}. \qquad (14)$$

Для преобразований квазигеоцентрических систем координат формула (14) позволяет определять искажения углов в пределах точности вычислений.

Полученные в статье формулы можно применять для анализа искажений преобразований прямоугольных систем координат в спутниковой геодезии, в том числе и для определения вида преобразования.

Список литературы: 1. *Буткевич А. В., Кириллов В. Г.* Определение вида линейного трансформирования пространственных прямоугольных координат. — Геодезия и картография, 1978, № 4. 2. *Кириллов В. Г.* Характер линейных искажений при преобразованиях координат в трехмерном пространстве. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30.

Работа поступила в редколлегию 17 мая 1979 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Новополоцкого политехнического института.