УДК 527.62

В. А. КОВАЛЕНКО, Е. М. БАЛАНДА

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КООРДИНАТ ПУНКТА ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК

При выполнении привязочных работ, работ по созданию съемочного обоснования применяют прямые и обратные засечки, а также их комбинации. Выбор того или иного построения определяют, исходя из конкретных условий: взаимного расположения исходных и получаемых точек, ландшафта местности, условий видимости, инструментальной базы.

Рассмотрим случай, когда между исходными пунктами A и B (рис. 1) и определяемой точкой P нет взаимной видимости. Кроме того, условия местности (труднопроходимый лесной массив, городская застройка, водное пространство) таковы, что методы передачи координат с помощью измерения угловых и линейных величин на специально создаваемых промежуточных точках будут дорогостоящими или вообще неприменимыми.

В данной ситуации действия, достаточные для получения координат точки P, можно провести в следующей последовательности:

1) в промежуточных точках *1, 2, 3* (рис. 1) установить визирные цели, видимые с точек A, B и P;

2) в точках A, B и P измерить горизонтальные углы a_i, b_i, β_i;

3) по формулам прямой засечки вычислить координаты промежуточных точек *1, 2, 3;*

4) по формулам обратной засечки определить координаты точки P.

В качестве промежуточных точек могут быть использованы и подвижные цели. Так, если потребуется передать координаты с материка на остров при отсутствии прямой видимости, то между островом и материком можно направить плавучее средство с визирной целью, синхронные наблюдения которой с точек A, B и P организовать несложно. Очевидно, для повышения точности нахождения координат точки P, можно увеличить число промежуточных точек сверх трех необходимых. При обработке таких измерений возникает задача уравнивания.

Остановимся на этом вопросе подробнее.

Пусть на рис 1. A и B — исходные пункты; P — определяемый; $1, 2, .. n$ — промежуточные точки; a_i, b_i $(i=1, 2, .., n)$, β_j $(j=1, 2, ... 3 ... n)$ — измеренные горизонтальные углы; t, q — неизвестные углы при точках A и B; ξ, η — углы с вершиной в точке P. Так как уравнения связи исходных координат, измеренных углов и определяемых координат точки P представляются сложными, то для упрощения уравнительных вычислений сначала находим уравненные значения дирекционных углов α_{AP} и α_{BP} направлений AP и BP, а затем по формулам прямой засечки определяем уравненные координаты X_P и Y_P.

Непосредственно из чертежа

$$\alpha_{AP}=\alpha_{A1}-t;\quad \alpha_{BP}=\alpha_{B3}+q. \tag{1}$$

Вспомогательные углы t и q могут быть представлены как функции измеренных углов. Из треугольников $A1P$, $A2P$, $A3P$ находим:

$$\frac{S_{A1}\sin 1}{\sin\xi}=\frac{S_{A2}\sin 2}{\sin(\beta_2-\xi)};\quad \frac{S_{A1}\sin 1}{\sin\xi}=\frac{S_{A3}\sin 3}{\sin(\beta_3-\xi)}.$$

Обозначив $\measuredangle 1A2=a_{1.2}$, $\measuredangle 1A3=a_{13}$, получим $\measuredangle 1=180°-(t+\xi)$; $\measuredangle 2=180°-[(a_{12}-\beta_2)-(t+\xi)]$; $\measuredangle 3=180°-[(a_{13}+\beta_3)-(t+\xi)]$: Предыдущее равенство запишем в виде:

$$\frac{S_{A1}}{S_{A2}}(\sin\beta_2\operatorname{ctg}\xi-\cos\beta_2)=\sin(a_{12}+\beta_2)\operatorname{ctg}(t+\xi)-\cos(a_{12}+\beta_2);$$

$$\frac{S_{A1}}{S_{A3}}(\sin\beta_3\operatorname{ctg}\xi-\cos\beta_3)=\sin(a_{13}+\beta_3)\operatorname{ctg}(t+\xi)-\cos(a_{13}+\beta_3),$$

Обозначив $\dfrac{S_{A1}}{S_{A2}}=n_{12}$, $\dfrac{S_{A1}}{S_{A3}}=n_{13}$, нетрудно показать, что

$$n_{12}=\frac{\sin b_1\sin(a_2+b_2)}{\sin b_2\sin(a_1+b_1)};\quad n_{13}=\frac{\sin b_1\sin(a_3+b_3)}{\sin b_3\sin(a_1+b_1)}. \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{gathered}n_{12}\sin\beta_2\operatorname{ctg}\xi-\sin(a_{12}+\beta_2)\operatorname{ctg}(t+\xi)-\\-[n_{12}\cos\beta_2-\cos(a_{12}+\beta_2)]=0;\\n_{13}\sin\beta_3\operatorname{ctg}\xi-\sin(a_{13}+\beta_3)\operatorname{ctg}(t+\xi)-\\-[n_{13}\cos\beta_3-\cos(a_{13}+\beta_3)]=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Решив уравнения (3) относительно $\operatorname{ctg}\xi$ и $\operatorname{ctg}(t+\xi)$, определим затем вспомогательный угол t.

Подобным образом можно определить и вспомогательный угол q. Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}m_{12}\sin\beta_2\operatorname{ctg}\eta-\sin(b_{12}+\beta_2)\operatorname{ctg}(q+\eta)-\\-[m_{12}\cos\beta_2-\cos(b_{12}+\beta_2)]=0;\\m_{13}\sin\beta_3\operatorname{ctg}\eta-\sin(b_{13}+\beta_3)\operatorname{ctg}(q+\eta)-\\-[m_{13}\cos\beta_3-\cos(b_{13}+\beta_3)]=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь

$$m_{12}=\frac{S_{B1}}{S_{B2}}=\frac{\sin a_1\sin(a_2+b_2)}{\sin a_2\sin(a_1+b_1)};\quad m_{13}=\frac{S_{B1}}{S_{B3}}=\frac{\sin a_1\sin(a_3+b_3)}{\sin a_3\sin(a_1+b_1)}. \tag{5}$$

Получив вспомогательные углы t и q, вычислим по формулам (1) дирекционные углы α_{AP} и α_{BP}.

Таким образом, для передачи координат в точку P необходимо иметь не менее трех промежуточных точек. Каждая дополнительная промежуточная точка дает дополнительное уравнение вида (3) или (4). При числе этих точек, равном k, можно составить две группы уравнений поправок по $k-1$ уравнений в каждой. Так, уравнения (3) служат основой для составления $k-1$ уравнений поправок вида

$$a_i \operatorname{ctg} \xi + b_i \operatorname{ctg}(t+\xi) - l_i = v_i,$$

где

$$a_i = n_{1i} \sin \beta_i;\ b_i = -\sin(a_{1i} + \beta_i);$$

$$l_i = n_{1i} \cos \beta_i - \cos(a_{1i} + \beta_i);\ i = 2, 3, \ldots, k.$$

Решение уравнений поправок под условием $[vv] = \min$ приводит к уравненным значениям t, q и дирекционных углов α_{AP}

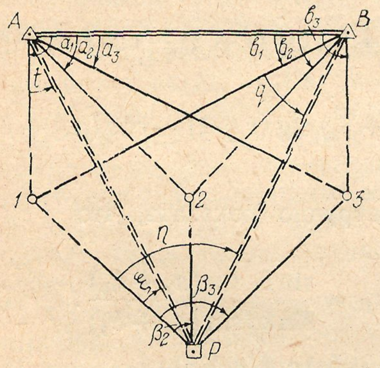

Рис. 1. Схема сети.

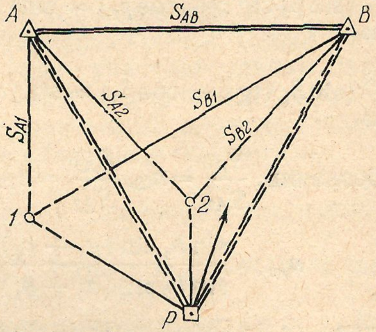

Рис. 2. Схема передачи координат.

и α_{BP}. Применив формулы прямой засечки, получим уравненные координаты определяемой точки.

Рассматриваемая задача представляет собой последовательное выполнение прямой и обратной засечек. Поэтому выводы, касающиеся точности этих построений, справедливы и для данного случая.

Если представится возможность определить в точке P астрономический азимут с последующим переходом к дирекционным углам направлений на промежуточные точки, то в результате решения уравнений поправок находим непосредственно уравненные значения $\operatorname{tg} \alpha_{AP}$ и $\operatorname{tg} \alpha_{BP}$, входящие в формулу передачи координат. Кроме того, исходные формулы составляются не по трем, а по двум промежуточным точкам.

На рис. 2 α_{A_i}, α_{B_i}, α_{P_i} — дирекционные углы направлений, измеренных в точках A, B, P.

Из треугольников $A1P$ и $A2P$

$$\frac{S_{A1} \sin[(\alpha_{PA} - \alpha_{PA}) + (\alpha_{A1} - \alpha_{P1})]}{\sin(\alpha_{PA} - \alpha_{P1})} =$$

$$= \frac{S_{A2} \sin[(\alpha_{PA} - \alpha_{AP}) + (\alpha_{A2} - \alpha_{P2})]}{(\sin \alpha_{P2} - \alpha_{PA})},$$

так как $\alpha_{PA} - \alpha_{AP} = 180°$, то

$$\frac{\sin(\alpha_{AP} - \alpha_{P2})}{\sin(\alpha_{AP} - \alpha_{P1})} = \frac{S_{A2}\sin(\alpha_{A2} - \alpha_{P2})}{S_{A1}\sin(\alpha_{A1} - \alpha_{P1})}.$$

Принимая во внимание отношение $\frac{S_{A2}}{S_{A1}}$, имеем

$$\frac{\sin(\alpha_{AP} - \alpha_{P2})}{\sin(\alpha_{AP} - \alpha_{P1})} = \frac{\sin(\alpha_{BA} - \alpha_{B2})\sin(\alpha_{A1} - \alpha_{B1})\sin(\alpha_{A2} - \alpha_{P2})}{\sin(\alpha_{BA} - \alpha_{B1})\sin(\alpha_{A2} - \alpha_{B2})\sin(\alpha_{A1} - \alpha_{P1})}.$$

Введем обозначение:

$$\frac{\sin(\alpha_{BA} - \alpha_{B2})\sin(\alpha_{A1} - \alpha_{B1})\sin(\alpha_{A2} - \alpha_{P2})}{\sin(\alpha_{BA} - \alpha_{B1})\sin(\alpha_{A2} - \alpha_{B2})\sin(\alpha_{A1} - \alpha_{P1})} = \frac{\sin M_2}{\sin M_1}$$

Тогда

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_{AP}\cdot\cos\alpha_{P2} - \sin\alpha_{P2}}{\operatorname{tg}\alpha_{AP}\cdot\cos\alpha_{P1} - \sin\alpha_{P1}} = \frac{\sin M_2}{\sin M_1}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha_{AP}\cdot\cos\alpha_{P2}\sin M_1 - \cos\alpha_{P1}\sin M_2 =$$
$$= \sin\alpha_{P2}\sin M_1 - \sin\alpha_{P1}\cdot\sin M_2. \qquad (6)$$

Обозначив

$\cos\alpha_{P2}\sin M_1 - \sin M_2\cos\alpha_{P1} = a$; $\sin\alpha_{P2}\sin M_1 - \sin\alpha_{P1}\sin M_2 = l$

получим систему уравнений поправок вида

$$a_i \operatorname{tg}\alpha_{AP} - l_i = v_i. \qquad (A)$$

Их число будет равно числу независимых пар промежуточных точек.

Подобным образом из треугольников $B1P$ и $B2P$ находим:

$$\frac{\sin\alpha_{P2} - \cos\alpha_{P2}\operatorname{tg}\alpha_{BP}}{\sin\alpha_{P1} - \cos\alpha_{P1}\operatorname{tg}\alpha_{BP}} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha_{P2} - \alpha_{B2})\sin(\alpha_{A2} - \alpha_{AB})\sin(\alpha_{B1} - \alpha_{A1})}{\sin(\alpha_{P1} - \alpha_{B1})\sin(\alpha_{A1} - \alpha_{AB})\sin(\alpha_{B2} - \alpha_{A2})} = \frac{\sin N_2}{\sin N_1}.$$

Отсюда

$$(\sin N_2\cos\alpha_{P1} - \sin N_1\cos\alpha_{P2})\operatorname{tg}\alpha_{BP} =$$
$$= \sin N_2\sin\alpha_{P1} - \sin N_1\sin\alpha_{P2}. \qquad (7)$$

Введя обозначения

$\sin N_2\cos\alpha_{P1} - \sin N_1\cos\alpha_{P2} = b$; $\sin N_2\sin\alpha_{P1} - \sin N_1\sin\alpha_{P2} = k$

получим систему уравнений поправок

$$b_i \operatorname{tg}\alpha_{BP} + k_i = v_i. \qquad (B)$$

Решая отдельно каждую из систем (А) и (В), находим уравнение значения $\operatorname{tg}\alpha_{AP}$ и $\operatorname{tg}\alpha_{BP}$.

Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha_{AP} = \dfrac{[al]}{[aa]}$; $\operatorname{tg}\alpha_{BP} = \dfrac{[bk]}{[bb]}$.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса $m = \pm \dfrac{[vv]}{n-1}$, следовательно, веса уравненных величин будут соответственно равны $[aa]$ и $[bb]$.

Тогда средние квадратические ошибки тангенсов дирекционных углов определятся из выражений:

$$M_{AP} = \pm \frac{m_{AP}}{[aa]}; \quad M_{BP} = \pm \frac{m_{BP}}{[bb]}.$$

Уравненные координаты точки P можно найти методом прямой засечки, пользуясь формулами Гаусса:

$$X_P = \frac{X_A \operatorname{tg}\alpha_{AP} - X_B \operatorname{tg}\alpha_{BP} + (Y_2 - Y_1)}{\operatorname{tg}\alpha_{1P} - \operatorname{tg}\alpha_{2P}};$$

$$Y_P = Y_A + \operatorname{tg}\alpha_{AP}(X_P - X_A) = Y_B + \operatorname{tg}\alpha_{BP}(X_P - X_B).$$

Пренебрегая погрешностями координат исходных точек, получаем формулы для оценки точности координат точки P:

$$M_x = \pm \frac{\sqrt{(X_P - X_A)^2 M_{AP}^2 + (X_P - X_B)^2 M_{BP}^2}}{\operatorname{tg}\alpha_{AB} - \operatorname{tg}\alpha_{BP}};$$

$$M_y = \pm \sqrt{(X_P - X_A)^2 M_{AP}^2 + \operatorname{tg}^2\alpha_{AP} \cdot M_x^2} =$$

$$= \sqrt{(X_P - X_B)^2 M_{BP}^2 + \operatorname{tg}^2\alpha_{BP} \cdot M_x^2}.$$

Анализ влияния на точность определений ошибки ориентирования в точке P показал, что эта ошибка полностью входит в значение дирекционных углов α_{AP} и α_{BP}. Вычисления координат точки P двумя способами (по формулам прямой и обратной засечки, а затем с использованием формул $\operatorname{tg}\alpha_{AP}$ и $\operatorname{tg}\alpha_{BP}$) привели к одному и тому же результату.

Для проверки формул использовались опытные измерения для передачи координат на расстоянии 2 км. Измерения выполняли теодолитом ОТ-02. Расстояние между исходными пунктами определяли светодальномером ЕОК-2000. Координаты вычисляли с точностью до 0,01 м.

Работа поступила в редколлегию 17 мая 1979 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии Львовского политехнического института.