

В. Е. ДЕМЕНТЬЕВ

ОЦЕНКА ОШИБОК, ВЫЗЫВАЕМЫХ ДИСКРЕТНОСТЬЮ ИЗМЕРЕНИЙ

В последние годы в геодезических работах все чаще начинают применяться автоматические приборы.

С помощью этих приборов измерения выполняются, как правило, в дискретные моменты времени. Если наблюдаемая визирная цель движется, а траектория движения изменяется нелинейно, то кроме погрешностей измерений имеют место и погрешности, вызванные дискретностью воспроизведения закона изменения траектории. Назовем их погрешностями за дискретность измерений. Эти погрешности зависят от частоты измерений, скорости и закона движения объекта. В свою очередь, частота измерений обусловлена частотой сканирования, быстродействием фотоприемных устройств, инерционностью механических узлов приборов и т. д. Из-за дискретности измерений возникают погрешности аппроксимации функции, характеризующей траекторию движения наблюдаемого объекта.

В качестве примера представим на графике движение объекта, высота которого изменяется относительно поверхности земли по экспоненциальному закону, а затем по прямой:

$$H(t) = \begin{cases} H_0 \exp(-\beta t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0,3(t_2 - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $\beta = 1/5 \text{ с}^{-1}$; $t_1 = 15 \text{ с}$; $t_2 = 20 \text{ с}$; $H_0 = 30 \text{ м}$.

Если измерять положение объекта каждые 5 с, т. е. с частотой 0,2 Гц, а в интервалах между измерениями значения $H(t)$ получать путем линейного интегрирования, то вычисленные значения $H(t)$ имеют ошибки порядка 2 м (рис. 1), что не всегда может

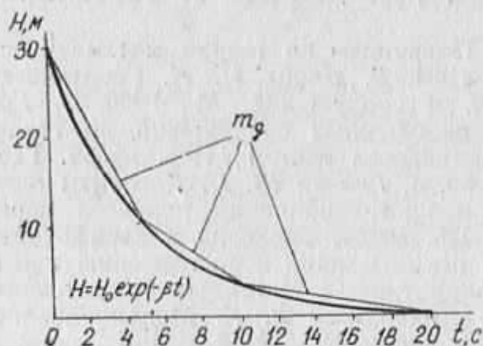


Рис. 1. Траектория движения объекта, выраженная:

— экспонентой вида $H = H_0 \exp(-\beta t)$;
 — ломаной линией, полученной в результате измерений положения объекта с интервалом в 5 с. Ошибка аппроксимации m_g уменьшается с увеличением времени t (на первом участке $m_g \approx 2 \text{ м}$, на прямом — $m_g = 0$).

быть приемлемо. Из рис. 1 можно заключить, что с увеличением частоты измерений уменьшается ошибка аппроксимации функции $H(t)$. Кроме того, ошибка изменяется с изменением функции $H(t)$. Действительно, с увеличением t ошибка уменьшается, а на прямолинейном участке траектории она равна нулю.

Таким образом, для увеличения точности необходимо увеличить частоту измерений, а это в свою очередь вызывает усложнение аппаратуры. Вполне естественно, частоту измерений нельзя увеличивать неограниченно. Чтобы правильно выбрать частоту измерений, необходимо знать зависимость между частотой измерений и ошибкой аппроксимации функции.

Согласно теореме Котельникова функция $F(t)$, не содержащая частот выше f_c , полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга на $h = 1/2f$ с. Теорема Котельникова справедлива лишь для бесконечно длящихся во времени процессов.

При описании закона движения можно использовать помимо функции времени $F(t)$ спектральную $S(\omega)$.

При спектральном представлении траектории движения наибольшие амплитуды спектральных составляющих приходятся на область низких частот и, начиная с некоторой более высокой частоты, они вносят столь малый вклад в описание закона движения объекта, что с ними можно не считаться.

Для воспроизведения непрерывной функции, имеющей ограниченную ширину спектра, требуется определять все мгновенные значения функции.

Функцию $F(t)$ с ограниченной шириной спектра можно выразить через свои отсчеты $F(kh)$:

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kh) \frac{\sin 2\pi F(t - kh)}{2\pi f(t - kh)}. \quad (2)$$

В действительности при наблюдениях функция $F(t)$ имеет конечную длительность, т. е. ограничена по аргументу t и, следовательно, имеет бесконечно широкий спектр.

Такую функцию нужно восстановить по дискретным отсчетам, число которых $n = 2fT_H$ ограничено вследствие непродолжительности наблюдения T_H . Тогда

$$F(t) = \sum_{k=1}^n F(kh) \psi(t), \quad (3)$$

где

$$\psi(t) = \frac{\sin 2\pi f(t - kh)}{2\pi f(t - kh)}, \quad (4)$$

а энергию спектра этой функции можно представить как сумму квадратов отсчетов:

$$\int_0^T F^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{k=1}^n F^2(kh). \quad (5)$$

Для описания реальной функции $F(t)$ можно использовать функцию с ограниченным спектром. В таком случае ошибки произведения функции в точках отсчета будут равны нулю, а в промежутках между отсчетами они возрастают. Если частота измерений составляет f_c , то частоту среза ω_c определяем из соотношения $\omega_c = \pi f_c$.

Оценим энергию пренебрегаемых частот, т. е. частот выше ω_c [1, 2]:

$$E_s = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (6)$$

Энергию всего спектра частот находим из соотношения

$$E_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (7)$$

где $S(\omega)$ — спектр функции $F(t)$, который можно определить, воспользовавшись преобразованием Фурье:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (8)$$

Среднюю квадратическую ошибку аппроксимации функции можно найти из соотношения

$$m_g = \frac{E_\epsilon}{E_c} F(t). \quad (9)$$

Таким образом, для оценки ошибки, вызываемой дискретностью измерений, используем формулу

$$m_g = F(t) \frac{\int_{\omega_c}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 d\omega}. \quad (10)$$

Применяя полученные соотношения, можно оценить величину m_g для случая, когда закон движения объекта описывается выражением (1).

С учетом (1) выражения (6) и (7) принимают следующий вид:

$$E_\epsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{H_0^2 d\omega}{\beta^2 \omega^2} = \frac{H_0^2}{\pi\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega_0}{\beta} \right); \quad (11)$$

$$E_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H_0^2 d\omega}{\beta^2 + \omega^2} = \frac{H_0^2}{2\beta}. \quad (12)$$

Подставляя полученные значения E_c и E_ϵ в (10), получаем

$$m_{Hg} = \frac{2H_0\beta}{\omega_c} \exp(-\beta t). \quad (13)$$

Зависимость m_{Hg} от t при $H_0=30$ м, $\beta=1/5$ с⁻¹ и частоте измерений 10 Гц и 50 Гц показана на рис. 2.

На практике встречаются также задачи по определению положения объекта, движение которого можно описать гармоническим законом:

$$F(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (14)$$

где A амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — фаза колебаний; t — время.

Так как измерения выполняются ограниченное время, то весь процесс можно представить отрезком синусоиды:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ A \sin \omega_0 t & \text{при } 0 < t < \frac{2\pi n}{\omega_0}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{2\pi n}{\omega_0}. \end{cases} \quad (15)$$

Спектр этого процесса получаем преобразованием Фурье функции $F(t)$, т. е.

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} A \sin \omega_0 t \exp(-j\omega t) dt =$$

$$= A \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin n\pi \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (16)$$

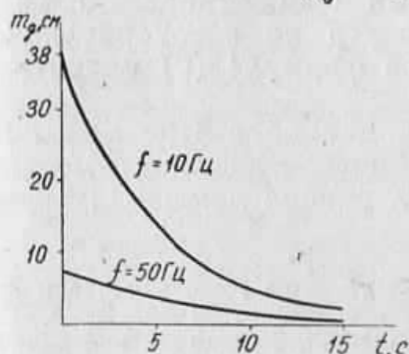


Рис. 2. Зависимость средней квадратической ошибки m_g , вызванной дискретностью измерений, от частоты измерений f и времени измерений t при экспоненциальном законе движения объекта.

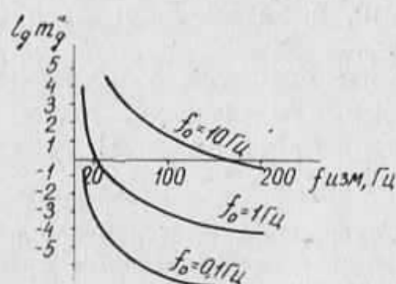


Рис. 3. Зависимость средней квадратической ошибки m_g , вызванной дискретностью измерений, от частоты измерений f и частоты гармонических колебаний объекта f_0 . Величина m_g отложена на оси абсцисс в логарифмическом масштабе.

Используя соотношение (10), определим погрешность за дискретность измерений для случая, когда закон движения объекта описывается синусоидой:

$$m_g = \frac{\int_{\omega_c}^{\infty} \left| A \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin n\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} \left| A \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin n\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2 d\omega} A \sin \omega_0 t. \quad (17)$$

Приняв $\omega/\omega_0 = a$, $n=1$, можно написать $a_c = \omega_c/\omega_0$; $d\omega = \omega_0 da$ и

$$\frac{\int_{a_c}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi a}{(1-a)^2} da}{\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+a)^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi a}{(1-a)^2} da} A \sin \omega_0 t. \quad (18)$$

Применяя численное интегрирование, получаем значения m_g для различных значений частоты измерений $f_{\text{изм}}$ и для различных частот колебаний объекта f_0 .

На рис. 3 приведены графики, показывающие зависимость средней квадратической ошибки m_g от частоты измерений $f_{\text{изм}}$ для частот гармонических колебаний объекта $f_0 = 0,1; 1; 10$ Гц и амплитуды колебаний $A = 10^\circ$. Для значений m_g , выраженных в угловых секундах, принят логарифмический масштаб.

В том случае, когда оцениваемый процесс носит случайный характер, можно вычислить его спектр по автокорреляционной функции, а затем E_c и E_e и согласно формуле (9) оценить величину m_g .

Таким образом, предложенный в данной статье метод позволяет оценить ошибку, вызываемую дискретностью измерений, в зависимости от частоты измерений и закона движения изучаемого объекта.

1. Турбович И. Т. К вопросу применения теоремы Котельникова к функциям времени с неограниченным спектром // Радиотехника. 1958. № 8. С. 11—12.
2. Турбович И. Т. Аналитическое представление функции с неограниченным спектром // Радиотехника. 1959. № 3. С. 22—27.