УДК 528.1

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАЖОРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРА МАТРИЦ В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Исследование свойств собственных значений матриц, возникающих в уравнительных вычислениях, встречает значительные трудности. В большинстве случаев эти свойства описывают в виде неравенств, которые весьма полезны в теоретических выкладках и позволяют дать иногда практические рекомендации по выбору того или иного способа уравнивания для конкретной геодезической сети при составлении системы нормальных уравнений с лучшей обусловленностью.

Целый ряд подобного типа экстремальных неравенств и рекомендаций дан болгарским геодезистом И. Тренковым [4, 8, 9 и др.], причем в своих исследованиях он руководствовался, как правило, теорией пучка квадратичных форм [1].

Представленные здесь неравенства, полученные на основе теории мажоризации [3], не только подтверждают выводы И. Тренкова, но и имеют существенные уточнения, отличия и достоинства. Во-первых, они получены с использованием другого математического аппарата , который позволил упростить и существенно сократить объем математических выкладок, что уже представляет определенный интерес. Во-вторых, что наиболее важно, получаемые мажорантные неравенства для собственных значений матриц в действительности более общие, чем неравенства И. Тренкова. Они дают возможность обосновать целый ряд новых результатов и благодаря большей универсальности и простоте выводов существенно полезнее и с методической точки зрения.

Ниже рассмотрим применение теории мажоризации на примере изучения свойств матриц весовых коэффициентов уравненных наблюдений и необходимых неизвестных. Подобный анализ можно провести для матриц и в других случаях геодезической практики. Предварительно условимся нумеровать все собственные значения $\lambda(A)$ квадратной матрицы A в порядке невозрастания и приведем простейшее определение мажорантных соотношений.

Определение [3]. Вектор X мажорируется вектором Y, если

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i;\ k=1,2,\cdots n-1,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

где x_i и y_i — компоненты вектора X и Y порядка n, упорядоченные по невозрастанию.

В дальнейшем использованы матрицы коэффициентов A и B параметрических и условных уравнений соответственно, матрица нормальных уравнений $N=A^{\tau}Q_{Y}^{-1}$ параметрического способа уравнивания ранга rang $N=\rho\leqslant m$, где m — число необходимых неизвестных; Q_Y — положительно определенная матрица весовых коэффициентов вектора измерений Y ранга rang $Q_Y=n$; n — число измерений.

Учитывая, что результаты уравнивания любым способом теоретически идентичны, без ограничения общности для матрицы весовых коэффициентов уравненного вектора измерений $\overline{Y}$ при параметрическом уравнивании имеем выражение

$$Q_{\overline{Y}} = AN^{+}A^{\tau}, \tag{1}$$

где N^{+} — псевдообратная к N матрица, так как $\rho\leqslant m$, а при коррелатном —

$$Q_{\overline{Y}} = Q_Y - Q_Y B^{\tau}(BQ_Y B^{\tau})^{-1} BQ_Y. \tag{2}$$

Из (1) и свойств ранга матриц следует, что

$$\operatorname{rang}, Q_{\overline{Y}} = \operatorname{rang} A = \rho, \tag{3}$$

т. е. матрица $Q_{\overline{Y}}$ вырожденная, неотрицательно определенная и имеет $r=n-\rho$ нулевых собственных значений.

Обозначим второй член в выражении (2) через

$$C=Q_Y B^{\tau}(BQ_Y B^{\tau})^{-1}BQ_Y.$$

Ранг неотрицательно определенной матрицы C

$$\operatorname{rang} C=r, \tag{4}$$

т. е. равен числу избыточных измерений.

Перепишем выражение (2) в виде

$$Q_Y = Q_{\overline{Y}} + C. \tag{5}$$

Применяя к (5) теорему для собственных значений суммы матриц [6], получаем неравенства

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s+j_s-s}(Q_Y) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{j_s}(C), \tag{6}$$

где

$$1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n,$$
$$1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant n,$$
$$i_k+j_k\leqslant k+n. \tag{7}$$

Если выполняются условия (7) и условие $i_1+j_1 \geqslant n+2-k$, то

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s+j_s+k-s-n}(Q_Y) \geqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{b} \lambda_{j_s}(C). \qquad (8)$$

Из мажорантных оценок (6)—(8) вытекает целый ряд других неравенств [6], например,

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_Y) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(C),$$

откуда при $k=1$ получим

$$\lambda_{i_1}(Q_Y) \leqslant \lambda_{i_1}(Q_{\overline{Y}}) + \lambda_1(C). \qquad (9)$$

Аналогично можно получить

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_Y) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(C), \qquad (10)$$

откуда следует

$$\lambda_{i_1}(Q_Y) \leqslant \lambda_1(Q_{\overline{Y}}) + \lambda_{i_1}(C). \qquad (11)$$

Учитывая (3) и (4), имеем

$$\begin{gathered} \lambda_{\rho+1}(Q_{\overline{Y}}) = \lambda_{\rho+2}(Q_{\overline{Y}}) = \cdots = \lambda_n(Q_{\overline{Y}}) = 0, \\ \lambda_{r+1}(C) = \lambda_{r+2}(C) = \ldots = \lambda_n(C) = 0, \end{gathered} \qquad (12)$$

тогда из (9) и (11) находим

$$\begin{gathered} \lambda_i(Q_Y) \leqslant \lambda_1(C),\ i = \rho+1, \ldots, n, \\ \lambda_j(Q_Y) \leqslant \lambda_1(Q_{\overline{Y}}),\ j = r+1, \cdots, n. \end{gathered}$$

Полагая $j_s = r+1, r+2, \ldots, n$, $i_s = j$, $k=1$, из формулы (6) получаем

$$\lambda_j(Q_Y) \leqslant \lambda_{j-r}(Q_{\overline{Y}}),\ j = r+1, \cdots, n, \qquad (13)$$

или

$$\lambda_{r+i}(Q_Y) \leqslant \lambda_i(Q_{\overline{Y}}),\ i = 1, 2, \cdots, \rho. \qquad (14)$$

Из обратных неравенств (8) следует соотношение

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_Y) \geqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{n-k+s}(C),$$

полагая в котором $k=1$ и учитывая (12), имеем

$$\lambda_j(Q_Y) \geqslant \lambda_j(Q_{\overline{Y}}),\ j = 1, 2, \cdots, n, \qquad (15)$$

т. е. любое собственное значение матрицы весовых коэффициентов уравненных измерений меньше или равно соответствующему ему собственному значению матрицы весовых коэффициентов вектора измерений.

Объединяя соотношения (14) и (15), можно написать

$$\lambda_i(Q_Y) \geqslant \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geqslant \lambda_{r+i}(Q_Y),\ i = 1, 2, \cdots, \rho. \quad (16)$$

Из соотношений (16) следует грубая экстремальная оценка И. Тренкова [4, 8], полученная при ранге $\rho=m$:

$$\lambda_1(Q_Y) \geqslant \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geqslant \lambda_n(Q_Y),\ i = 1, 2, \cdots, m. \quad (17)$$

Пусть измерения независимы. Положим $Q_Y=P^{-1}$, где P — диагональная весовая матрица с пронумерованными в порядке неубывания весами $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$. Тогда $\lambda_i(Q_Y)=p_i^{-1}$, и из (16) следует оценка для каждого собственного значения

$$p_i^{-1} \geqslant \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geqslant p_{r+i}^{-1},\ i = 1, 2, \cdots, \rho, \quad (18)$$

т. е. первые r наименьших весов измерений не влияют на нижнюю ненулевую границу спектра матрицы $Q_{\bar{Y}}$.

Из соотношений (18) как частные случаи следуют экстремальные оценки И. Тренкова, полученные при $\rho=m$:

$$p_1^{-1} \geqslant \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geqslant p_n^{-1},\ i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\lambda_i(Q_{\bar{Y}}) = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \text{ если } p_1 = p_n = 1.$$

Кроме указанных неравенств для матриц $Q_{\bar{Y}}$, Q_Y и C применимы также другие мажорантные неравенства, приведенные, например, в [3].

Рассмотрим свойства матрицы весовых коэффициентов порядка m уравненного вектора необходимых неизвестных параметрического способа уравнивания

$$Q_{\bar{X}} = N^+ = (A^{\mathsf{T}} Q_{\bar{Y}}^{-1} A)^+.$$

Для упорядоченных в невозрастающем порядке ее собственных значений $\lambda(Q_{\bar{X}})$ и диагональных элементов $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_m$ можно использовать мажорантные неравенства [3]

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(Q_{\bar{X}}) \geqslant \sum_{i=1}^{k} q_i; \quad (19)$$

$$\prod_{i=k}^{m} \lambda_i(Q_{\bar{X}}) \leqslant \prod_{i=k}^{m} q_i, \quad (20)$$

$$k=1, 2, \ldots, m.$$

В (19) соблюдается знак равенства при $k=m$.

Из (19) и (20) в виде частного случая при $k=1$ в (19) и $k=m$ в (20) следует неравенство, приведенное в [8]:

$$\lambda_i(Q_{\bar{X}}) \geqslant q_i \geqslant \lambda_m(Q_{\bar{X}}). \quad (21)$$

Оно непосредственно следует также из известного принципа Релея [2].

Максимальное собственное значение $\lambda_1(Q_{\bar{X}})$ обратно минимальному ненулевому собственному значению матрицы нормальных уравнений параметрического способа уравнивания, поэтому из (21) становится ясным, что именно оно определяет верхнюю границу обратных весов неизвестных и оказывает решающую роль на точность геодезической сети в целом.

Рассмотрим свойства матрицы весовых коэффициентов вектора уравненных измерений и неизвестных:

$$Q_{\overline{T}} = \begin{pmatrix} Q_{\overline{Y}} & Q_{\overline{Y},\overline{X}} \\ Q_{\overline{X},\overline{Y}} & Q_{\overline{X}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} Q_{\overline{X}} \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{22}$$

где E — единичная матрица. Из представления (22) следует, что $\operatorname{rang} Q_{\overline{T}} = \operatorname{rang} Q_{\overline{X}} = \rho$, т. е. матрица $Q_{\overline{T}}$ имеет $m+n-\rho$ собственных значений, равных нулю:

$$\lambda_j (Q_{\overline{T}}) = 0,\ j = \rho + 1,\ \rho + 2, \cdots, m + n. \tag{23}$$

Применяя к матрицам $Q_{\overline{T}}$, $Q_{\overline{Y}}$ и $Q_{\overline{X}}$ теорему о собственных значениях блочных матриц [7], получаем

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s+j_s-s}(Q_{\overline{T}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{m+n-k+s}(Q_{\overline{T}}) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{j_s}(Q_{\overline{X}}) \tag{24}$$

для

$$\begin{gathered} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant m, \\ k \leqslant \min(m, n). \end{gathered} \tag{25}$$

Из формул (23) и (25) следует, что в (24) второй член в выражении, слева равен нулю, т. е.

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s+j_s-s}(Q_{\overline{T}}) \leqslant \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{Y}}) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}(Q_{\overline{X}}),$$

откуда при $k=1$ имеем $\lambda_{i_1+j_1-1}(Q_{\overline{T}}) \leqslant \lambda_{i_1}(Q_{\overline{Y}}) + \lambda_{j_1}(Q_{\overline{X}})$

или

$$\lambda_i (Q_{\overline{T}}) \leqslant \min [\lambda_1 (Q_{\overline{Y}}) + \lambda_i (Q_{\overline{X}}),\ \lambda_i (Q_{\overline{Y}}) + \lambda_1 (Q_{\overline{X}})]. \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что из неравенств (26) следует левая часть более грубой экстремальной оценки И. Тренкова [4, 8]:

$$\begin{gathered} \lambda_1 (Q_{Y}) + \lambda_1 (Q_{\overline{X}}) \geqslant \lambda_i (Q_{\overline{T}}) \geqslant \lambda_n (Q_{Y}) + \lambda_m (Q_{\overline{X}}), \\ i = 1,\ 2, \ldots, \rho = m. \end{gathered} \tag{27}$$

На основании теоремы о сингулярных значениях блочных матриц [5] можно записать также соотношения

$$\lambda_i (Q_{\overline{T}}) \geqslant \max [\lambda_i (Q_{\overline{Y}}),\ \lambda_i (Q_{\overline{X}})], \tag{28}$$

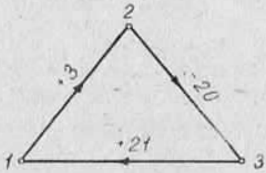
объединяя которые с (26), получаем

$$\begin{gathered} \min [\lambda_1 (Q_{\overline{Y}}) + \lambda_i (Q_{\overline{X}}),\ \lambda_i (Q_{\overline{Y}}) + \lambda_1 (Q_{\overline{X}})] \geqslant \\ \geqslant \lambda_i (Q_{\overline{T}}) \geqslant \max [\lambda_i (Q_{\overline{Y}}),\ \lambda_i (Q_{\overline{X}})], \\ i = 1, 2, \cdots, \rho. \end{gathered} \tag{29}$$

Неравенства (16), (18) и (29), в отличие от неравенств И. Тренкова, более общие и позволяют локализовать каждое собственное значение в отдельности. Кроме того, неравенства И. Тренкова (17) и (27) доказаны лишь для $\rho = m$, в то время как полученные здесь соотношения справедливы при $\rho \leqslant m$.

Проиллюстрируем полученные выше соотношения на элементарном численном примере. Пусть уравнивается свободная нивелирная сеть, показанная на рисунке, в которой равноточно измерены превышения h_1, h_2 и h_3 с весами $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Тогда имеем

Схема нивелирной сети



$$\lambda_1(Q_Y) = \lambda_2(Q_Y) = \lambda_3(Q_Y) = 1,\ m = 3,\ \rho = 2,\ r = 1. \tag{30}$$

Матрица

$$Q_{\bar Y} = Q_Y - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $r = 1$, по $\lambda_2(C) = \lambda_3(C) = 0$, а след $\operatorname{Sp} C = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i(C) = \lambda_1(C) = 1$. Из неравенств (16) и равенств (12) и (30) имеем

$$\lambda_1(Q_{\bar Y}) = \lambda_2(Q_{\bar Y}) = 1,\ \lambda_3(Q_{\bar Y}) = 0.$$

Выбирая в качестве неизвестных параметров отметки пунктов, получаем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad Q_{\bar X} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как оказалось, что $Q_{\bar X} = \frac{1}{3} Q_{\bar Y}$, сразу можно записать:

$$\lambda_i(Q_{\bar X}) = \frac{1}{3}\lambda_i(Q_{\bar Y}),\quad i = 1, 2, 3,\ \text{т. е. } \lambda_1(Q_{\bar X}) = \lambda_2(Q_{\bar X}) = \frac{1}{3},$$

$\lambda_3 = (Q_{\bar X}) = 0$. Неравенство (21) для диагональных элементов матрицы $Q_{\bar X}$ при этом соблюдается:

$$\frac{1}{3} \geqslant q_i = \frac{2}{9} \geqslant 0.$$

По формуле (22) составим матрицу

$$Q_{\top} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 6 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Так как $\rho=2$, из (23) сразу получим:

$$\lambda_i(Q_{\top}) = 0, \quad i = 3, 4, 5, 6.$$

Для ненулевых собственных значений матрицы $Q_{\top}$ можно написать:

$$\mathrm{Sp}\, Q_{\top} = \lambda_1(Q_{\top}) + \lambda_2(Q_{\top}) = \frac{8}{3}. \qquad (31)$$

Далее из неравенств (29) следует:

$$1 \leqslant \lambda_1(Q_{\top}) \leqslant \frac{4}{3}; \quad 1 \leqslant \lambda_2(Q_{\top}) \leqslant \frac{4}{3}.$$

Так как любое из чисел $\lambda_1(Q_{\top})$ и $\lambda_2(Q_{\top})$ не должно превосходить 4/3, с учетом (31) получим

$$\lambda_1(Q_{\top}) = \lambda_2(Q_{\top}) = \frac{4}{3}.$$

Изложенная методика, таким образом, в данном примере позволила не только рассмотреть свойства собственных значений соответствующих матриц в виде неравенств, но и определить их точные значения практически без привлечения какой-либо вычислительной техники.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967. 2. *Герасименко М. Д.* Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. Владивосток, 1983. 3. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. М., 1983. 4. *Тренков И.* Върху характеристичните числа на корелационната матрица на изравнените наблюдения и корелационната матрица на изравнените наблюдения и неизвестните // Изв. на центр. лаб. по геодезия. 1974. Кн. 14. С. 45—50. 5. *Thompson R. C.* Principal submatrices IX: Interlacing inequalities for singular valuer of submatrices // Linear Algebra and its Applications. 1972. V. 5. N 1. P. 1—12. 6. *Thompson R. C., Freede L. J.* On the eigenvalues of sums of Hermitian matrices // Linear Algebra and its Applications. 1971. V. 4. P. 369—376. 7. *Thompson R. C., Therianos S.* The eigenvalues of complementary principal submatrices of a positive definiti matrix // Canadian Journal of Mathematics. 1972. V. 24. N 4. P. 658—667. 8. *Trencov I.* A study of the spectrum of the matrices at an adjustment by the method of the least squares and its evolution // Results of the scientific cooperation between the Central laboratory of geodesy of the Bulgarian Academy of Sciences in Sofia and the Geodetic and Geophysical reseach Institut of the Hungerian Academy of Sciences in Sopron. Sopron. 1976. P. 11—60. 9. *Trencov I.* Une propriété du nombre de Todd des matrices normales obtenues en compensation par la methode des moindres carres // Bulletin geodesique. 1973. N 107. P. 85—88.

Статья поступила в редколлегию 05. 01. 8