По формуле (22) составим матрицу

$$Q_{\mp} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 6 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\rho=2$, из (23) сразу получим:

$$\lambda_i(Q_{\mp}) = 0, \ i = 3, 4, 5, 6.$$

Для ненулевых собственных значений матрицы $Q_{\mp}$ можно написать:

$$\mathrm{Sp}\, Q_{\mp} = \lambda_1(Q_{\mp}) + \lambda_2(Q_{\mp}) = \frac{8}{3}. \qquad (31)$$

Далее из неравенств (29) следует:

$$1 \leqslant \lambda_1(Q_{\mp}) \leqslant \frac{4}{3}; \quad 1 \leqslant \lambda_2(Q_{\mp}) \leqslant \frac{4}{3}.$$

Так как любое из чисел $\lambda_1(Q_{\mp})$ и $\lambda_2(Q_{\mp})$ не должно превосходить 4/3, с учетом (31) получим

$$\lambda_1(Q_{\mp}) = \lambda_2(Q_{\mp}) = \frac{4}{3}.$$

Изложенная методика, таким образом, в данном примере позволила не только рассмотреть свойства собственных значений соответствующих матриц в виде неравенств, но и определить их точные значения практически без привлечения какой-либо вычислительной техники.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967. 2. *Герасименко М. Д.* Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. Владивосток, 1983. 3. *Маршалл А., Олкин И,* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. М., 1983. 4. *Тренков И.* Върху характеристичните числа на корелационната матрица на изравнените наблюдения и корелационната матрица на изравнените наблюдения и неизвестните // Изв. на центр. лаб. по геодезия. 1974. Кн. 14. С. 45—50. 5. *Thompson R. C.* Principal submatrices IX: Interlacing inequalities for singular valuer of submatrices // Linear Algebra and its Applications. 1972. V. 5. N 1. P. 1—12. 6. *Thompson R. C., Freede L. J.* On the eigenvalues of sums of Hermitian matrices // Linear Algebra and its Applications. 1971. V. 4. P. 369—376. 7. *Thompson R. C., Therianos S.* The eigenvalues of complementary principal submatrices of a positive definiti matrix // Canadian Journal of Mathematics. 1972. V. 24. N 4. P. 658—667. 8. *Trencov I.* A study of the spectrum of the matrices at an adjustment by the method of the least squares and its evolution // Results of the scientific cooperation between the Central laboratory of geodesy of the Bulgarian Academy of Sciences in Sofia and the Geodetic and Geophysical reseach Institut of the Hungerian Academy of Sciences in Sopron. Sopron. 1976. P. 11—60. 9. *Trencov I.* Une propriété du nombre de Todd des matrices normales obtenues en compensation par la methode des moindres carres // Bulletin geodesique. 1973. N 107. P. 85—88.

Статья поступила в редколлегию 05. 01. 86

УДК 528.48

П. Д. ДВУЛИТ, Н. Д. ЙОСИПЧУК

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДАМИ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Известно, что вертикальные смещения инженерных сооружений в основном зависят от физико-механических свойств грунтов и от случайных факторов: температуры, влажности грунта, изменения уровня грунтовых вод и др. [4]. В процессе эксплуатации инженерных сооружений по окончании подъема наружных фундаментов начинается осадка. Изменение осадки во времени аппроксимируют той или иной кривой, вид которой устанавливается по результатам геодезических измерений.

Вертикальные смещения прогнозируют, как правило, кривыми параболического, гиперболического и экспоненциального типов. Подбор эмпирической формулы для прогнозирования осадки сооружения можно производить и другими методами. Однако все эти методы не дают удовлетворительных результатов. По данным прогнозирования вертикальных смещений инженерных сооружений [3—5], с помощью указанных типов уравнений можно сделать вывод, что для ближайших четырех—шести циклов наблюдений (для случая равных промежутков времени между ними) точность аппроксимации составляет 1 ... 3 мм, что удовлетворяет практические потребности.

В данной работе для прогнозирования вертикальных смещений используем методы равномерной аппроксимации (Чебышевское приближение непрерывной функции алгебраическими многочленами или многочленами Чебышева) [1, 2]. Простейшая задача, приводящая к приближению функции, заключается в следующем: в дискретные моменты времени $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ наблюдается значение функции $f(x)$. Требуется определить ее значение при других значениях x.

Полином $S_m(x)$, наименее отклоняющийся в равномерном смысле от функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$, называется полиномом наилучшего равномерного приближения. Этот многочлен будем искать в виде

$$S_m(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m, \qquad (1)$$

где $A_0, A_1 \ldots A_m$ — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

В случае среднеквадратической аппроксимации функции $f(x)$ полиномами Чебышева аппроксимирующий многочлен имеет вид

$$S_m(x) = C_0 \cdot T_0(x) + C_1T_1(x) + \ldots + C_m \cdot T_m(x),$$

где $C_0, C_1 \ldots C_m$ — коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева для функции $f(x)$, а T_m — полиномы Чебышева степени m, которые вычисляем по реккурентной формуле [1]

$$T_{m+1}(x) = 2T_1(x) \cdot T_m(x) - T_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Как показали вычисления, проводимые по реальным данным, эти методы аппроксимации функции $f(x)$ дают одинаковые в пределах точности результаты. Однако предпочтение нужно отдать Чебышевскому приближению, поскольку отпадает необходимость вычислять полиномы Чебышева и аппроксимацию функции $f(x)$ можно осуществить с достаточной для практики точностью даже для случая неравноотстоящих друг от друга узлов.

Проиллюстрируем применение данной методики прогнозирования осадок некоторых характерных грунтовых реперов и марок технологического комплекса промплощадки яворовского производственного объединения «Сера».

По полученным в результате наблюдений отметкам реперов и марок необходимо определить эти отметки для других циклов.

Для выполнения прогноза осадок проанализированы результаты наблюдений семнадцати циклов и выбраны характерные марки и грунтовые реперы, отметки которых изменяются в пределах 23 . . . 73 мм. Следует указать, что наблюдения за осадками в циклах проводились не через равные промежутки времени. Для решения задачи прогнозирования осадок методом равномерной аппроксимации использована программа на алгоритмическом языке «Бейсик» и вычисления выполнены на ЭВМ СМ-4 [6]. Программа состоит из следующих этапов:

1) нахождение с наименьшей абсолютной погрешностью приближения вида

$$S_m(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_mx^m;$$

2) выбор начального приближения;
3) решение задачи Чебышевской интерполяции;
4) нахождение максимального отклонения;
5) изменение номеров точек альтернанса;
6) результаты прогнозирования.

По результатам прогнозирования получаем значение отметки репера или марки на определенный момент времени цикла наблюдений, а также значение коэффициентов формулы (1). Анализ результата счета приближений показал, что для достижения необходимой точности прогноза можно ограничиться полиномами шестой степени. В таблице приведены отметки характерных грунтовых реперов и марок по результатам прогнозирования и геодезическим наблюдениям.

По данным таблицы видно, что отклонения наблюденных значений отметок характерных грунтовых реперов и марок от прогнозируемых могут достигать 4 . . . 5 мм. Если учесть точность наблюдений в 2 мм, то можно отметить, что точность прогноза превышает точность наблюдений в два раза. Точность прогнозирования можно улучшить, если увеличить степень полинома на один-два порядка.

Таким образом, составленную программу приближенного построения полинома наилучшего равномерного приближения на алгоритмическом языке «Бейсик» можно использовать при прогнозировании осадок для случая неодинаковых периодов времени

между циклами наблюдений. Для улучшения точности прогнозирования осадок целесообразно использовать информацию о геодезических наблюдениях последних 10—15 циклов и увеличить степень полинома. По результатам выполненного прогнозирования можно получить информацию о предполагаемой периодичности геодезических наблюдений за осадками.

Сравнение наблюденных и прогнозируемых отметок характерных грунтовых реперов и марок (H в м)

Название реперов и марок	Циклы наблюдений					
	18		19		20	
	наблюденная отметка	прогнозируемая отметка	наблюденная отметка	прогнозируемая отметка	наблюденная отметка	прогнозируемая отметка
	Грунтовые реперы					
A	262,567	262,566	262,566	262,568	262,564	262,568
B	261,206	261,206	261,206	261,207	261,204	261,209
C	259,167	259,168	259,166	259,168	259,164	259,168
	Марки					
а	265,962	265,963	265,961	265,963	265,959	265,963
в	265,928	265,930	265,928	265,931	265,925	265,928
с	265,050	265,051	265,052	265,052	265,052	265,055

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М., 1973. 2. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М., 1960. 3. *Болгов И. Ф.* Геодезические работы при строительстве и испытании крупных сооружений. М., 1984. 4. *Ганьшин В. Н., Стороженко А. Ф., Ильин А. Г.* Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов. М., 1981. 5. *Монцибович Б. Р., Попов Б. А.* Наилучшие приближения табличных функций (алгоритмы и программы). К., 1973. Ч. 1, 2. 6. *Николаев С. А.* Статистические исследования осадок инженерных сооружений. М., 1983.

Статья поступила в редколлегию 30. 12. 85

УДК 551.24:528.48

Э. М. ЕВСЕЕВА, В. В. КИРИЧУК

О МЕТОДАХ ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ СОВРЕМЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

В настоящее время большое развитие получили комплексные исследования различных по физической природе полей Земли на основе всевозрастающего объема количественной информации самого различного вида и формы.

Изучаемые явления в достаточной мере сложны и судить о них можно лишь по совокупности косвенных признаков, так что адек-