УДК 528.3

Д. И. МАСЛИЧ, Л. С. ХИЖАК, И. И. ДИДУХ, И. А. МУЗЫКА, Н. Д. ЙОСИПЧУК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СВЕТОВОЙ КРИВОЙ И УГЛОВ РЕФРАКЦИИ В АТМОСФЕРЕ

Определению уравнения световой кривой и искажений рефракцией измеренных углов посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Тем не менее эта проблема в настоящее время в общем случае не решена. Во-первых, сложность ее решения состоит в том, что для получения уравнений световой кривой и рефракционных углов необходимо знать распределение показателя преломления в атмосфере, зависящего от метеофакторов, которые в атмосфере изменяются по сложным закономерностям.

Во-вторых, если даже в отдельных случаях известно распределение показателя преломления в атмосфере, точное решение задачи невозможно из-за отсутствия соответствующих методов решения уравнений Эйлера.

В настоящей статье предложен новый метод определения уравнений световой кривой и рефракционных углов по измеренным значениям метеорологических элементов. Согласно этому методу, искомые величины получают из решения системы уравнений динамики атмосферы, описывающих ее состояние, и уравнений Эйлера, которым должно удовлетворять уравнение световой кривой. Подобного рода теоретические разработки, предполагающие получение уравнения световой кривой и рефракционных углов из решения уравнений Эйлера с учетом геодезических и метеорологических измерений, рассмотрены в работе [3]. Однако при решении задачи здесь не учитываются уравнения динамики атмосферы.

Известно, что состояние атмосферы описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-2\omega_z v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+N_x;\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+2\omega_z u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+N_y;\\
&g=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};\\
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{T}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial t}+\left(\frac{\partial T}{\partial z}-\gamma_a\right)w=\frac{\varepsilon}{c_p\rho},
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где u, v, w — составляющие вектора скорости движения воздуха; ω_z — составляющая угловой скорости вращения Земли; g — ускорение силы тяжести; ε — приток тепла к единичному объему за единицу времени; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\chi=\dfrac{c_p}{c_v}$ — коэффициент адиабаты; γ_a — адиабатический градиент температуры; N_x, N_y — составляющие вектора силы турбулентной вязкости.

Отыщем частное решение системы (1) со следующими начальными (2) и граничными условиями (3):

$$\left.\begin{aligned} &T|_{t=0}=T(x,y,z); \quad v|_{t=0}=v(x,y,z);\\ &u|_{t=0}=u(x,y,z); \quad p|_{t=0}=p(x,y,z); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &T|_{M(0,0,0)}=T(t); \quad T|_{M(x_1,y_1,z_1)}=T_1(t);\\ &p|_{M(0,0,0)}=p(t); \quad p|_{M(x_1,y_1,z_1)}=p_1(t);\\ &u|_{M(0,0,0)}=u(t); \quad u|_{M(x_1,y_1,z_1)}=u_1(t);\\ &v|_{M(0,0,0)}=v(t); \quad v|_{M(x_1,y_1,z_1)}=v_1(t);\\ &w|_{M(0,0,0)}=w(t); \quad w|_{M(x_1,y_1,z_1)}=w_1(t), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которые могут быть получены по наблюдениям соответствующих метеоэлементов.

В результате решения задачи (1)—(3) с учетом уравнения Менделеева—Клапейрона

$$\rho=p\mu/RT, \tag{4}$$

где μ — масса моля; R — газовая постоянная, получаем выражения для параметров: $T(t,x,y,z)$, $p(t,x,y,z)$, $u(t,x,y,z)$, $v(t,x,y,z)$, $w(t,x,y,z)$; и на основании формулы Даля—Гладстона

$$n=1+c\rho \tag{5}$$

вычисляем коэффициент преломления. Здесь c — постоянная, зависящая от длины волны распространяющегося излучения.

Известно [4], что на основании принципа Ферма

$$\delta\int_0^s n\,ds=0, \tag{6}$$

уравнение световой кривой должно удовлетворять системе Эйлера вида:

$$\left.\begin{aligned} &F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0;\\ &F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $F=n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$. (8)

Решая систему (7) при граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned} y/_{x=0} &= y_0; \quad y/_{x=x_1} = y_1; \\ z/_{x=0} &= z_0; \quad z/_{x=x_1} = z_1; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

или

$$\left.\begin{aligned} y/_{x=0} &= y_0; \quad y'/_{x=0} = y_0'; \\ z/_{x=0} &= z_0; \quad z'/_{x=0} = z_0', \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

получаем уравнение световой кривой, записываемое в общем виде для условий (9) в форме:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= f_1(x, y_0, y_1, z_0, z_1); \\ z(x) &= f_2(x, y_0, y_1, z_0, z_1). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и для условий (10) в форме:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= \varphi_1(x, y_0, y_0', z_0, z_0', \\ z(x) &= \varphi_2(x, y_0, y_0', z_0, z_0' \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Граничные условия (9)—(10) можно получить непосредственно из измерений.

Перейдем теперь к определению углов рефракции (рис. 1).

Задавая граничные условия (9), угол между вектором касательной к пространственной кривой и хордой найдем по формуле [4]

$$\cos\theta = \frac{(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) y_0' + (z_1 - z_0) z_0'}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\sqrt{1 + y_0'^2 + z_0'^2}}, \tag{13}$$

а проекции этого угла на вертикальную и горизонтальную плоскости — соответственно по формулам:

$$\cos\theta_{zx} = \frac{(x_1 - x_0) + (z_1 - z_0) z_0'}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\sqrt{1 + z_0'^2}}; \tag{14}$$

$$\cos\theta_{yz} = \frac{(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) y_0'}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\sqrt{1 + y_0'^2}}. \tag{15}$$

В случае условий (10) определение углов рефракции можно свести к предыдущей задаче, если задаться расстоянием s от точки наблюдения до источника света.

Действительно, тогда координаты точки $M(x_1, y_1, z_1)$, из которой выходит световой луч, определяем из совместного решения системы (12) и уравнения

$$s^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \tag{16}$$

В качестве иллюстрации описанной методики рассмотрим задачу определения уравнения световой кривой и углов рефракции при прохождении луча над однородной поверхностью в безветренную погоду, если температура распределяется стационарно, без учета поглощения коротковолновой и длинноволновой радиации в приземном слое сухого воздуха атмосферы. В этом случае система (1) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c_p\rho} &= 0; \\ \rho g - \frac{dp}{dz} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (17) \qquad \text{а также} \qquad \left.\begin{aligned} a\frac{d^2T}{dz^2} &= 0; \\ \rho g - \frac{dp}{dz} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (17')$$

где a — коэффициент температуропроводности.

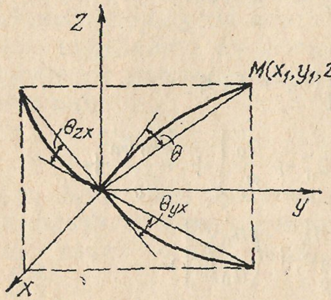

Рис. 1. К вопросу определения углов рефракции.

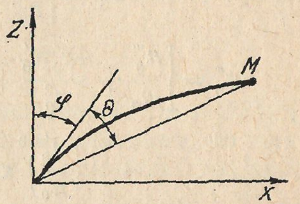

Рис. 2. Схема распространения света.

Решая задачу Коши для системы (17) при начальных условиях:

$$T|_{z=0} = T_0; \quad \frac{dT}{dz}\Big|_{z=0} = T_0'; \quad p|_{z=0} = p_0 \qquad (18)$$

и используя уравнение (4), представляем плотность воздуха в виде

$$\rho = \frac{\mu}{R} p_0 T_0^{-\frac{\mu g}{RT_0'}} (T_0' z + T_0)^{\frac{\mu g}{RT_0'} - 1}. \qquad (19)$$

Следовательно, на основании уравнения (5) получаем выражение для показателя преломления

$$n(z) = 1 + \frac{c\mu}{R} p_0 T_0^{-\frac{\mu g}{RT_0'}} (T_0' z + T_0)^{\frac{\mu g}{RT_0'} - 1}. \qquad (20)$$

Уравнение (7) и граничные условия (10) для нашего случая примут соответственно вид:

$$nz'' - n_z'(1 + z'^2) = 0; \quad (21) \qquad \left.\begin{aligned} z|_{x=0} &= 0; \\ z'|_{x=0} &= \operatorname{ctg}\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

где φ — угол между направлением вертикальной оси и касательной к световой кривой в начальной точке (т. е. измеренное зенитное расстояние в точке наблюдения).

Поскольку решение уравнения (21) в квадратурах в данном случае трудно выразить, отыщем его в виде ряда по степеням x

$$z = z_0 + \frac{z'_0}{1!}x + \frac{z''_0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{z_0^{(k)}}{k!}x^{(k)} + \cdots, \tag{23}$$

где индекс «0» при z обозначает, что соответствующие значения z и ее производных вычисляем в точке $M(0, 0)$.

Тогда задача сводится к отысканию производных от z по x. Эти производные записываем следующим образом:

$$\begin{gathered} z_0' = \operatorname{ctg}\varphi,\ z_0'' = \frac{n_0'}{n_0}(1 + z_0'^2); \\ z_0''' = \left[\frac{n''_0}{n_0} + \left(\frac{n'_0}{n_0}\right)^2\right](z'_0 + z_0'^3); \\ z''_0 = \left[\frac{n'''_0}{n_0} + \frac{4n''_0 n'_0}{n_0^2} + \left(\frac{n'_0}{n_0}\right)^3\right] z_0'^4 + \frac{n'''_0}{n_0}\left[+\frac{5n''_0 n'_0}{n_0^2} + \right. \\ \left. + 2\left(\frac{n'_0}{n_0}\right)^3 z_0'^2 = \left[\frac{n''_0 n'_0}{n_0^2} + \left(\frac{n'_0}{n_0}\right)^3\right]\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} n_0 &= 1 + \frac{c\mu p_0}{RT_0}, \\ n_0' &= \frac{c\mu p_0(\mu g - RT_0')}{(RT_0)^2}; \\ n_0^{(k)} &= n_0^{(k-1)}\frac{\mu g - (k-1)RT_0'}{RT_0}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Получить в общем виде выражение производной z по x сложно, поэтому мы вычисляли значения производных, соответствующих состоянию атмосферы для реально возможных условий. Как показали вычисления, ряд (23) сходится для значений $|x| \leqslant 1000$ м.

Так, для данных:

$\varphi = 80°$;	$p_0 = 10^5$ Па;
$c = 2{,}92 \cdot 10^{-4}$ м³/с;	$R = 8{,}31 \cdot 10^3$ Дж/кмоль·К;
$\mu = 28{,}966$ кг/кмоль;	$T_0 = 300$ К;
$g = 9{,}81$ м/с²;	$T_0' = 1$ К/м

получены следующие значения производных: $n_0 = 1{,}000339$; $n_0' = 1{,}0922 \cdot 10^{-6}$; $n''_0 = 0{,}7157 \cdot 10^{-8}$; $n'''_0 = 0{,}7075 \cdot 10^{-10}$; $z_0 = 0$; $z_0' = 0{,}17633$; $z''_0 = 1{,}1258 \cdot 10^{-6}$; $z'''_0 = 0{,}1301 \cdot 10^{-8}$, $z_0^{IV} = -2{,}2022 \cdot 10^{-12}$.

Если x выходит за интервал сходимости ряда (23), расстояние $[x_0\, x_1]$ разбиваем на интервалы, длина каждого из которых не превышает интервала сходимости ряда (23). Значения z и производных $z^{(k)}$ (для $k \geqslant 2$) для каждого конца такого интервала вычисляем по предложенной выше методике; причем z' определяем по формуле

$$z' = \sqrt{\frac{n^2}{n_0^2 \sin^2 \varphi} - 1}, \tag{26}$$

получаемой из первого интеграла решения уравнений Эйлера (21) [4] при известных краевых условиях.

Найдем теперь угол вертикальной рефракции (рис. 2). Угол Θ можно определить по формуле (14), если задано $s = |0M|$ — расстояние от наблюдателя до источника измерения, представляемое в виде

$$s^2 = x_1^2 + z_1^2, \tag{27}$$

где x_1, z_1 вычисляют при совместном решении систем (23), (27).

Поскольку Θ может принимать малые значения, то для получения таких углов воспользуемся формулой разложения в ряд [2]

$$\theta = 2\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{3\alpha^5}{20} + \frac{5\alpha^7}{56} + \cdots, \tag{28}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_1 + z_1 \cdot z_0'}{s\sqrt{1 + z_0^{12}}}\right)}.$$

Приведем пример решения задачи для указываемых выше условий и для расстояния $s = 1000$ м.

Система уравнений, определяющих координаты конечной точки световой кривой для случая четырех членов ряда, примет вид:

$$\left.\begin{aligned} z(x) &= \frac{z_0'}{1!}x + \frac{z_0''}{2!}x^2 + \frac{z_0'''}{3!}x^3 + \frac{z_0^{\mathrm{IV}}}{4!}x^4; \\ s^2 &= x^3 + z^2. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Решая эту систему методом итерации по формулам:

$$z_k(x) = \frac{z_0'}{1!}x_{k-1} + \frac{z_0''}{2!}x_{k-1}^2 + \frac{z_0'''}{3!}x_{k-1} + \frac{z_0^{\mathrm{IV}}}{4!}x_{k-1}^4; \quad x_{k+1} = \sqrt{s^2 - z_k^2}$$

при $x_0 = 1000$, получаем значения конечной точки: $x_1 = 984{,}88$ м; $z_1 = 173{,}14$ м. Тогда $\alpha = 0{,}7246 \cdot 10^{-3}$ и $\Theta = 4$ мин 49,86 с.

Как видно из приведенных вычислений, полученное значение рефракции соответствует принятым условиям прохождения визирного луча.

Список литературы: 1. *Гандин А. С., Лайхтман Д. Л., Матвеев А. П., Юдин М. Н.* Основы динамической метеорологии. — Л. : Гидроэнергоиздат, 1955. 2. *Градштейн И. С., Рыжак И. И.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Физматгиз, 1962. 3. *Мещеряков Г. А.* О геометрии светового луча. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975, вып. 22. 4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. 3-е изд. — М. : Госэнергоиздат, 1957, т. 4.

Работа поступила в редколлегию 13 апреля 1979 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.