УДК 528.23

В. П. ПОДШИВАЛОВ

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ЛЮБЫЕ РАССТОЯНИЯ

Как доказано ранее [5], при введении для решения прямой геодезической задачи на поверхности эллипсоида вращения переменной x

$$\sin u_i = \sqrt{1-c^2}\cos x_i, \ (i=1,2) \tag{1}$$

интегралы расстояния и разности долгот с относительной погрешностью порядка $1\cdot 10^{-10}$ имеют вид:

$$S = \alpha(x_1-x_2)+\beta\sin(x_1-x_2)\cos(x_1+x_2)- \\ -\gamma\sin 2(x_1-x_2)\cos 2(x_1+x_2); \tag{2}$$

$$l = \operatorname{arctg}\left[\frac{c(\operatorname{tg}x_1-\operatorname{tg}x_2)}{c^2+\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_2}\right]-\alpha'(x_1-x_2)+ \\ +\beta'\sin(x_1-x_2)\cos(x_1+x_2), \tag{3}$$

где

$$\alpha = a_1(1-k^2/4-3k^4/64-5k^6/256);\ \beta = a_1k^2(1+k^2/4+15k^4/128)/4; \\ \gamma = a_1k^4(1+3k^2/4)/128, \tag{4}$$

$$\alpha' = e^2c(1+e^2/8+e^2c^2/8+3e^4/64+e^4c^2/32+e^4c^4/64)/2; \\ \beta' = e^4c(1-c^2)(1+e^2/2+e^2c^2/2)/16. \tag{5}$$

Кроме того,

$$a_1 = a\sqrt{1-e^2c^2};\ k^2 = e^2(1-c^2)/(1-e^2c^2);$$
$$c = \sin A_i \cos u_i;\ (i=1,2), \qquad (6)$$

где u — приведенная широта, l — разность долгот точек геодезической линии, S — длина геодезической линии.

Выражения (2)—(3) позволяют решить прямую геодезическую задачу без каких-либо ограничений в расстояниях между точками и их взаимном положении на поверхности эллипсоида.

Для решения обратной геодезической задачи эти выражения применимы, когда известна постоянная c в уравнении Клеро для геодезической линии.

Если пренебречь сжатием земного эллипсоида и положить $\varphi_i = u_i$, $\lambda_i = L_i$, то можно записать по формулам сферической тригонометрии, приведенным в работе [4], приближенное значение постоянной в уравнении Клеро, которое обозначим c_0

$$c_0 = \sin l \cos u_i / \sqrt{\sin^2 l + \cos^2 u_i \{\operatorname{tg} u_{[i-(-1)i]} - \operatorname{tg} u_i \cos l\}^2};$$
$$(i=1,2). \qquad (7)$$

Точное значение постоянной отличается от вычисленного из формулы (7) на величину Δc, при этом наблюдается выражение

$$c = c_0 + \Delta c, \qquad (8)$$

где Δc — какая-то, пока неизвестная, поправка, значение которой в относительной мере не превзойдет величины $e^2 \approx 7\cdot10^{-3}$. Исключение составит лишь случай $l \to \pi$, $x \to \frac{\pi}{2}$ $(u \to 0)$, когда кратчайшая кривая на сфере, имеющая значение c_0, полученное по формуле (7), будет стремиться к экватору; на поверхности эллипсоида кратчайшая кривая будет стремиться к меридиану. В последующих рассуждениях мы будем учитывать и этот «особый» случай.

Подставляя в уравнение (3) величину c_0, определяем приближенное значение разности долгот

$$l_0 = \operatorname{arctg}\left[\frac{c_0(\operatorname{tg} x_{01} - \operatorname{tg} x_{02})}{c_0^2 + \operatorname{tg} x_{01} \operatorname{tg} x_{02}}\right] - \alpha_0'(x_{01} - x_{02}) +$$
$$+ \beta_0' \sin(x_{01} - x_{02}) \cos(x_{01} + x_{02}). \qquad (9)$$

Здесь величины x_{01}, x_{02}, α_0', β_0' вычислены по формулам (1)—(5). В этих формулах вместо неизвестного значения c принято приближенное значение c_0. Учитывая условия, при которых вычисляется c_0 по формуле (7), имеем уравнение, вытекающее из формул сферической тригонометрии

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{c_0(\operatorname{tg} x_{01} - \operatorname{tg} x_{02})}{c_0^2 + \operatorname{tg} x_{01} \operatorname{tg} x_{02}}\right] = l. \qquad (10)$$

Если аналогично записать для разности долгот

$$l = l_0 + \Delta l, \tag{11}$$

то из уравнений (9)—(10) получаем выражение для поправки в разность долгот, вызванной поправкой Δc:

$$\Delta l = \alpha_0' (x_{01} - x_{02}) - \beta_0' \sin (x_{01} - x_{02}) \cos (x_{01} + x_{02}). \tag{12}$$

Как видно из формулы (12), поправка в относительной мере не превзойдет $e^2 \approx 7 \cdot 10^{-3}$ при любых условиях.

Чтобы установить зависимости между известной величиной Δl и искомой Δc, обратимся к выражению (3), куда вместо c и l подставим их выражения из (8) и (11). Разлагая правую часть выражения (3) в ряд по формуле Тейлора и ограничиваясь третьими членами разложений, получаем

$$\Delta l = n_1 \Delta c + n_2 \Delta c^2 + n_3 \Delta c^3, \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \{\operatorname{ctg} x_0 (1 - \alpha_0' c_0 + \beta_0' c_0 \cos 2x_0)/(1 - c_0^2) + \\ &+ e^2 [x_0 (1 + e^2/8 + e^2 c_0^2/8) - e^2 (1 - 3c_0^2) \sin 2x_0/16]/2\}\Big|_{x_{01}}^{x_{02}}; \\ n_2 &= \operatorname{ctg} x_0 \{c_0 (1 + 2 \sin^2 x_0) - \alpha_0' [c_0^2 + (3 - c_0^2) \times \\ &\times \sin^2 x_0]\}/2 (1 - c_0^2)^2 \sin^2 x_0\Big|_{x_{01}}^{x_{02}}; \\ n_3 &= \operatorname{ctg} x_0 [3c_0^2 + (1 + 3c_0^2)(1 + 2 \sin^2 x_0) \times \\ &\times \sin^2 x_0]/6 (1 - c_0^2)^3 \sin^4 x_0\Big|_{x_{01}}^{x_{02}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Для удобства вычислений целесообразно применить обращение степенного ряда (13), удерживая члены с Δl^3 [4], в результате чего имеем

$$\Delta c = \Delta l / n_1 - n_2 \Delta l^2 / n_1^3 + (2n_2^2 - n_1 n_3) \Delta l^3 / n_1^5. \tag{15}$$

Выражение (15) позволяет вычислить искомую поправку Δc без приближений с точностью порядка $5 \cdot 10^{-10}$. Исключение составит лишь «особый» случай, отмеченный ранее, для которого разложение (13) в пределах необходимой точности не выражает Δl в функции Δc. Здесь для вычисления поправки Δc необходимы последовательные приближения, основанные на уравнениях (9), (11), (14) и (15). Отметим, что в «особом» случае объем вычислений возрастает, однако задача вычисления постоянной c разрешима.

Вычислив предлагаемым способом постоянную в уравнении Клеро, решим обратную геодезическую задачу. Особенность данного способа — ведение интегрирования вдоль геодезической линии на поверхности эллипсоида через новую переменную x, привлечение сферы лишь для вычисления приближенного значения постоянной Клеро, а также отсутствие, кроме «особого» случая, приближений.

Предлагаем следующий порядок решения обратной геодезической задачи:

1. Предварительные вычисления:

$$c_0 = \sin l \cos u_i / \sqrt{\sin^2 l + \cos^2 u_i \{\operatorname{tg} u_{[i-(-1)i]} - \operatorname{tg} u_i \cos l\}^2},$$

$$(i = 1, 2);$$

$$x_{0i} = \operatorname{arctg}(\sqrt{\cos^2 u_i - c_0^2} / \sin u_i), \ (i = 1, 2);$$

$$\alpha_0' = e^2 c_0^2 (1 + e^2/8 + e^2 c_0^2/8 + 3e^4/64 + e^4 c_0^2/32 + e^4 c_0^4/64)/2;$$

$$\beta_0' = e^4 c_0 (1 - c_0^2)(1 + e^2/2 + e^2 c_0^2/2)/16;$$

$$n_1 = \{\operatorname{ctg} x_0 (1 - \alpha_0' c_0 + \beta_0' c_0 \cos 2x_0)/(1 - c_0^2) +$$
$$+ e^2 [x_0 (1 + e^2/8 + e^2 c_0^2/8) - e^2 (1 - 3c_0^2) \sin 2x_0/16]/2\}\Big|_{x_{01}}^{x_{02}};$$

$$n_2 = \operatorname{ctg} x_0 \{c_0 (1 + 2 \sin^2 x_0) - \alpha_0' [c_0^2 +$$
$$+ (3 - c_0^2) \sin x 2 (1 - c_0^2)^2 \sin^2 x_0\Big|_{x_{01}}^{x_{02}};$$

$$n_3 = \operatorname{ctg} x_0 [3c_0^2 + (1 + 3c_0^2)(1 + 2 \sin^2 x_0) \sin^2 x_0]/6 (1 - c_0^2)^3 \sin^4 x_0\Big|_{x_{01}}^{x_{02}};$$

$$\Delta l = \alpha_0' (x_{01} - x_{02}) - \beta_0' \sin (x_{01} - x_{02}) \cos (x_{01} + x_{02}).$$

2. Вычисление постоянной Клеро:

$$\Delta c = \Delta l / n_1 - n_2 \Delta l^2 / n_1^3 + (2n_2^2 - n_1 n_3) \Delta l^3 / n_1^5; \ c = c_0 + \Delta c.$$

3. Решение обратной геодезической задачи:

$$a_1 = a \sqrt{1 - e^2 c^2}; \ k^2 = e^2 (1 - c^2)/(1 - e^2 c^2);$$

$$x_i = \operatorname{arctg}(\sqrt{\cos^2 u_i - c^2} / \sin u_i), \ (i = 1, 2);$$

$$\alpha = a_1 (1 + k^2/4 + 3k^4/64 + 5k^6/256); \ \beta = a_1 k^2 (1 + k^2/4 + 15k^4/128)/4;$$

$$\gamma = a_1 k^4 (1 + 3k^2/4) 128;$$

$$S = \alpha (x_1 - x_2) + \beta \sin (x_1 - x_2) \cos (x_1 + x_2) -$$
$$- \gamma \sin 2 (x_1 - x_2) \cos 2 (x_1 + x_2);$$

$$A_1 = \operatorname{arctg}(c / \sqrt{\cos^2 u_1 - c^2}); \ A_2 = \operatorname{arctg}(c / \sqrt{\cos^2 u_2 - c^2}).$$

Примеры решения обратной геодезической задачи на любые расстояния, включая и «особый» случай, приведены в таблице.

Анализ предлагаемого способа решения обратной геодезической задачи на любые расстояния на поверхности земного эллипсоида, а также примеры вычислений свидетельствуют о возможности его практического применения. Вычисления удобно производить как с использованием настольной вычислительной техники, так и ЭВМ.

Сравнение предлагаемых формул с известными в геодезической литературе [1]—[3] и др. указывает на то, что получены новые формулы, которые, наряду с известными, можно применять для решения обратной геодезической задачи на любые расстояния.

Результаты решения обратной геодезической задачи

Обозначение	Варианты вычислений		
	I	II	III
u_1	$+45°00'00'',0000$	$+62°02'00'',5380$	$+01°00'00'',0000$
u_2	−44 59 59, 9996	−48 12 37,6632	+00 49 05,7969
l	179 34 02,4005	94 37 29,7265	178 59 42,9683
c_0	+ 0,7071642614	+ 0,4484337337	+ 0,4836111183
α_0	0,0023694505	0,0015022898	0,0016201814
β_0	0,0000009950	0,0000010072	0,0000010383
Δl	+ 0,0074312014	+ 0,0034690915	+ 0,0050311699
Δc	+ 0,0000025198	+ 0,0005083398	− 0,1621133843
$c_0+\Delta c$	+ 0,7071067812	+ 0,4489420736	+ 0,4023786118
c^1			+ 0,3908515040
c''			+ 0,3906719736
c'''			+ 0,3906716181
c	+ 0,7071067812	+ 0,4489420736	+ 0,3906716183
a_1	6367562,984	6373941,255	6374986,227
α	6362214,126	6365405,001	6365927,848
β	5349,982	8539,116	9061,602
γ	0,562	1,432	1,612
S	19987000,00 м	14700000,00 м	19780000,00 м
A_{12}	$90°00'00'',0000$	$116°00'00'',0000$	$23°00'00'',0000$
A_{21}	270 00 15,7157	317 38 52 ,0240	337 00 04,4069

Список литературы: 1. *Буткевич А. В.* Исследование по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1964. 2. *Ганьшин В. Н.* Геометрия земного эллипсоида. — М.: Недра, 1967. 3. *Морозов В. П.* Сфероидическая геодезия. — Итоги науки и техники: Геодезия и аэросъемка, 1978, т. 13. 4. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии.— М.: Недра, 1969. 5. *Подшивалов В. П.* Решение прямой геодезической задачи на любые расстояния. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30.

Работа поступила в редколлегию 26 апреля 1979 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Новополоцкого политехнического института.