

Средняя квадратическая ошибка измеренных углов по формуле Ферреро составила $\pm 8,3''$. Этот результат хорошо согласуется с ранее вычисленным $\pm 8,3''$. Измерения углов выполнялись в удобнейших условиях. В период же построения геодезической сети на исходном монтажном горизонте влияние внешних факторов очень сильное.

Результаты работы дают основания полагать, что при угловых измерениях по коротким сторонам нужно учитывать рассмотренные выше факторы. Для уменьшения влияния источников погрешностей в данных условиях необходимо производить низкую установку штатива, производить трех, четырехразовое пересмотривание прибора, теодолит и визирные цели по возможности располагать примерно в одном горизонте. Следует также учитывать влияние боковой рефракции при горизонтальных температурных градиентах более $0,4^\circ/\text{м}$, использовать дополнительное освещение визирных целей.

1. *Большаков В. Д., Горбенко О. Н., Калмов О. Д. и др.* Высоточные геодезические измерения для строительства и монтажа Большого серпуховского ускорителя. М., 1968. 2. *Климов О. Д., Мохов Ю. В.* О колебаниях визирной оси трубы теодолита при фокусировании // Тр. МИИГАиК. 1959. Вып. 36. С. 55—62. 3. Методика определения точности измерений при геодезическом контроле производств строительного-монтажных работ. М., 1973. 4. *Полещук Ю. В., Заболод-ный Ю. Н.* Об ошибках визирования при инженерно-геодезических работах // Геодезия и картография. 1985. № 1. С. 16—18. 5. *Рибинский Б. Н.* О действии боковой рефракции в триангуляции СССР // Тр. ЦНИИГАиК. 1949. Вып. 62. С. 76. 6. СНиП 3.01.03.84. Геодезические работы в строительстве. М., 1985.

Статья поступила в редакцию 10.02.86

УДК 528.3

Д. И. МАСЛИЧ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕФРАКЦИИ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

При определении положения объектов, недоступных для установки инструмента, решающее значение на точность измерения вертикальных и горизонтальных углов приобретает учет рефракции, который возможен инструментальным или метеорологическим методами. Инструментальный метод пока не вышел из стадии лабораторных разработок. Разработке теории и методов определения рефракции с использованием измеренных метеорологических атмосферных посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученых [1—3, 5, 11]. Однако при этом должны быть известны среднестатистические значения градиентов метеорологических элементов всей трассы, которые получить практически очень сложно. Принятые средние значения метеорологических элементов позволяют установить лишь приближенное значение рефракции.

Предлагаем новый метод определения рефракции с учетом динамики атмосферы и уравнений Эйлера для световой кривой. Некоторые вопросы этого метода изложены в [6, 7, 10]. Состояние динамики атмосферы описано системой дифференциальных уравнений [4, 8]. Так как общее решение данных уравнений очень сложно, то для наших целей ограничение системы этих уравнений. Для однородной подстилающей поверхности в случае постоянного изменения теплопередачи система принимает вид

$$\frac{d}{dz} \left[a(z) \frac{dT}{dz} \right] = A, \quad \rho g + \frac{dp}{dz} = 0, \quad (1)$$

где A — постоянная; a — коэффициент температуропроводности; T, ρ, p — температура, давление и плотность воздуха; g — составляющая ускорения силы тяжести по вертикали; z — высота над подстилающей поверхностью.

Будем считать, что коэффициент турбулентности изменяется по линейному закону [8], т. е.

$$a(z) = a_1 z + a_2, \quad (2)$$

где a_1, a_2 — некоторые коэффициенты, определяемые экспериментально. Решая систему уравнений (1), (2) при начальных условиях

$$T|_{z=0} = T_0, \quad \frac{dT}{dz}|_{z=0} = T'_0, \quad P|_{z=0} = P_0, \quad (3)$$

где T'_0 — вертикальный температурный градиент, и учитывая уравнение Менделеева-Клапейрона

$$\rho = \mu / RT, \quad (4)$$

где μ — масса моля; R — газовая постоянная, получаем T и ρ в виде следующих зависимостей:

$$T = \frac{A z}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \left(T'_0 - \frac{A}{a_1} \right) \ln \left| \frac{a_1 z + 1}{a_2} \right| + T_0; \quad (5)$$

$$\rho = \frac{\mu P_0}{RT_0} e^{\frac{\mu g}{RT_0}} \int \frac{dz}{T}. \quad (6)$$

Показатель преломления воздуха можно получить из формулы Дала-Гладстона

$$n = 1 + c\rho, \quad (7)$$

где c — постоянная, зависящая от длины волны распространяющегося излучения. Подставляя вместо ρ его значение (6), после преобразований получаем

$$n(z) = 1 - \frac{cAR}{a_1 \mu g} + \frac{cA_2}{a_1} (A - T'_0 a_1) \nu(z) \int \frac{e^{\frac{\mu g}{RT_0}} dz}{a_1 z + a_2} + c \left(\frac{P_0 \mu}{RT_0} + \frac{AR}{a_1 \mu g} \right) \nu(z), \quad (8)$$

где
$$v(z) = e^{-\frac{14\xi}{R}z}.$$

Исходя из принципа Ферма, траекторию распространения светового луча будем определять как экстремаль функционала [9]

$$I = \int_{x_0}^x n(z) \sqrt{1 + z'^2} dx, \quad (9)$$

в которой $n(z)$ выражается формулой (8).

Уравнением Эйлера, соответствующим функционалу (9), является

$$nz'' = n_z'(1 + z'^2). \quad (10)$$

Так как в общем случае это уравнение не решается, будем искать его решение в виде разложения в ряд Тейлора в окрестностях точек разбиения на участки при следующих граничных условиях:

$$z|_{x=0} = z_0, \quad z'|_{x=0} = \text{ctg } \xi. \quad (11)$$

В результате получим

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \dots, \quad (12)$$

где

$$z''(0) = \frac{n'(0)}{n(0) \sin^2 \xi};$$

$$z'''(0) = \left(\frac{n''(0)}{n'(0)} + \frac{n'(0)}{n(0)} \right) z''(0) z'(0); \quad (13)$$

Здесь ξ — измеряемое зенитное расстояние. Величины, зависящие от показателя преломления n , являющегося функцией z , находим из выражений:

$$n(0) = 1 + \frac{c\rho_0 r^4}{RT_0},$$

$$n'(0) = -\frac{c^4 \rho_0}{RT_0^2} \left(\frac{g^4}{R} + T_0' \right),$$

$$n''(0) = \frac{c^4 \rho_0}{RT_0^3} \left[\frac{a_1}{a_2} \left(T_0' - \frac{A}{a_1} \right) \left(\frac{g^4}{R} + T_0' \right) \left(\frac{g^4}{R} + 2T_0' \right) \right].$$

$$\dots \dots \dots (14)$$

Как видно из формул (13) и (14), коэффициенты ряда (12) — функции метеопараметров $T_0, T_0', \rho_0, a_1, a_2$ и зенитного расстояния ξ .

Коэффициент турбулентности можно получить также из непосредственных градиентных измерений. Метод этот приближенный, но удобен для практического использования, тем более, что он вычисляется совместно с определением вертикального градиента температуры. Рассмотрим вывод формул для случая, когда уравнение турбулентной теплопроводности можно представить в виде

$$\frac{d}{dz} \left[(a_1 z + a_2) \frac{dT}{dz} \right] = 0. \quad (15)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда Тейлора

$$T = T_0 + T_0'(z - z_0) + T_0'' \frac{(z - z_0)^2}{2!} + T_0''' \frac{(z - z_0)^3}{3!} + \dots \quad (16)$$

Значения производных, входящих в ряд (16), можно представить в виде

$$T'' = -\frac{a_1}{a_2 + a_1(z - z_0)} T',$$

$$T''' = 2 \frac{a_1^2}{[a_2 + a_1(z - z_0)]^2} T',$$

$$T^{IV} = -6 \frac{a_1^3}{[a_2 + a_1(z - z_0)]^3} T',$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T^{(k)} = (k-1)!(-1)^{k-1} \frac{a_1^{k-1}}{[a_2 + a_1(z - z_0)]^{k-1}} T'. \quad (17)$$

Производные (17) в начальной точке $z = z_0$ запишем в виде

$$T_0'' = -\frac{a_1}{a_2} T_0', \quad T_0''' = 2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 T_0',$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T_0^{(k)} = (k-1)!(-1)^{k-1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{k-1} T_0'. \quad (18)$$

Таким образом, мы получили все производные, необходимые для определения уравнения температуры. Применяя признак Даламбера, можно показать, что ряд (16) будет сходящимся, если

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right) (z - z_0) < 1, \quad (19)$$

откуда

$$(z - z_0) < \frac{a_2}{a_1}. \quad (20)$$

Чтобы получить этот ряд сходящимся для любой разности высот, необходимо как и раньше разбить разность высот $(z-z_0)$ на такие интервалы, для которых ряд (16) будет сходящимся.

Пусть в результате эксперимента мы получили значения температуры на некоторых высотах z_0, z_1 и z_2 , при этом высоты выбраны так, чтобы выполнялось условие (20). Тогда, опираясь на три членами разложения в ряд, можем записать

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + T'_0(z_1 - z_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) (z_1 - z_0)^2 T''_0, \\ T_2 &= T_0 + T'_0(z_2 - z_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) (z_2 - z_0)^2 T''_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычисленные $\Delta \xi$ и фактические $\Delta \xi_0$ значения вертикальной рефракции

Дата	Время	Измеренное зенитное расстояние $\xi=59^\circ$	T_0 , град. К	T'_0 , °К/м	Рефракция	
					вычисленная $\Delta \xi$	фактическая $\Delta \xi_0$
31.07	11 ^h 52 ^m	57°07,0"	294,28°	1,072	67,38"	46,00"
	12 03	57 06,8	294,53	0,789	53,86	46,2
	13 36	56 46,1	296,36	0,491	86,56	66,9
	13 58	56 18,6	297,99	1,073	156,23	94,4
	18 47	57 03,4	296,42	0,782	47,34	49,6
	18 58	57 03,4	296,73	0,782	47,34	49,6
	19 07	57 33,3	296,61	0,307	17,57	19,7
	20 00	57 26,6	295,48	0,651	38,17	26,1
01.08	9 20	57 19,2	294,81	0,797	40,40	33,8
	17 33	57 06,7	292,30	1,126	71,86	46,3
04.08	10 10	56 59,2	296,35	1,447	84,84	53,8
	10 12	57 11,1	295,86	0,839	50,01	41,9
19.08	16 59	56 50,7	290,52	1,102	100,33	62,3
21.08	11 43	57 06,4	293,10	0,905	79,18	46,4

где T_0, T_1, T_2 — температуры соответственно на высотах z_0, z_1 и z_2 . Таким образом, мы получили два уравнения с двумя неизвестными T'_0 и a_1/a_2 . Решая эти уравнения, получаем следующие формулы для определения вертикального градиента температуры T'_0 и значений, определяющих коэффициент турбулентности a_1/a_2 :

$$a_1 = \frac{2[\Delta T_2(z_1 - z_0) - \Delta T_1(z_2 - z_0)]}{a_2(z_1 - z_0)^2 \Delta T_2 - (z_2 - z_0)^2 \Delta T_1}; \quad (22)$$

$$T'_0 = \frac{\Delta T_1}{(z_1 - z_0) - \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} (z_1 - z_0)^2}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Delta T_1 = T_1 - T_0; \quad \Delta T_2 = T_2 - T_0. \quad (24)$$

Вычисления по этим формулам и результатам экспериментальных исследований дают значения коэффициента турбулентности

примерно такие же, которые были получены при определении турбулентного отношения с использованием уравнения световой кривой.

Таким образом, установив в начальной точке температуру, давление, вертикальный градиент температуры и коэффициент турбулентности по измеренному зенитному расстоянию ξ и дальности x , можем вычислить значение вертикальной составляющей рефракции $\Delta \xi$. Для небольших расстояний без учета наклона местности в системе координат XOZ значение $\Delta \xi$ составляет

$$\Delta \xi = \arctg \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{2R_0} \right) - \xi, \quad (25)$$

где R_0 — средний радиус Земли в точке наблюдения.

Для проверки изложенных теоретических соображений вычислена вертикальная рефракция $\Delta \xi$ по материалам экспериментальных измерений зенитного расстояния на линии длиной $x=764,96$ м, расположенной в южном степном районе вдоль шоссе, покрытого асфальтом, с разностью отметок концов линии $z=0,467$ м в период июль-начало августа. Зенитные расстояния измерены теодолитом OT-02, а температура на разных высотах — психрометром Ассмана. Результаты приведены в таблице, где вычисленные значения рефракции $\Delta \xi_0$ получены по данным геометрического нивелирования вдоль используемой линии.

Как видно из сравнения, разность вычисленных и фактических значений $\Delta \xi$ составляет около 30%. Это свидетельствует о правильности принятых в основу теоретических предположений и полученных формул. Чтобы иметь более правдивые результаты, необходимо уточнить определение коэффициента турбулентности.

1. Алексеев А. В., Кабанов М. В., Куштин И. Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере. Новосибирск, 1982. 2. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования // Тр. ЦНИИГАиК. 1955. Вып. 102. С. 214. 3. Мордов В., Эггерт О., Кнейсл М. Руководство по высшей геодезии. М., 1963. Т. 2. 4. Дайхман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Д., 1961. 5. Мислиц Д. И. Определение рефракции при наблюдении высоких объектов в атмосфере // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1970. Вып. 11. С. 59—66. 6. Мислиц Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И. и др. Определение уравнений световой кривой и углов рефракции в атмосфере // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1980. Вып. 32. С. 90—96. 7. Мислиц Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И. и др. Определение вертикальной рефракции над равнинной однородной поверхностью и инверсионный период // Тез докл. V Всесоюз. симпоз. по распределению лазерного излучения в атмосфере. Томск, июль 1979 г. Томск, 1979. Т. 2. С. 184—187. 8. Матвеев В. И. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Д., 1965. 9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1957. Т. 4. 10. Хижак Л. С., Мислиц Д. И., Дидух И. И. Приближенный метод нахождения уравнения световой кривой при определении рефракции // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1981. Вып. 34. С. 81—88. 11. Moritz H. Zur Geometrie der Refraction // Osterr. Z. Vermessungswesen. 1962. Bd. 50. N 1. S. 71.