

В. Д. ШИПУЛИН

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С УЧЕТОМ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

1. Постановка вопроса

При уравнивании геодезических измерений обычно полагают, что исходные данные являются безошибочными и не подлежат исправлению. В действительности же любые исходные данные содержат ошибки. Поэтому в результате уравнивания по указанному принципу получают недостоверные значения результатов измерений, а искаженные, причем геодезические сети после такого уравнивания становятся деформированными.

В качестве примера можно указать на значительную деформацию сети 2 класса, уравниваемой в полигонах триангуляции 1 класса, стороны и координаты которой принимаются за безошибочные исходные данные [1, 4]. Другой пример: положение пункта определяется многократной линейной засечкой; при этом стороны измерены практически безошибочно, но координаты исходных пунктов содержат ошибки. Согласно указанному принципу получается, что в этом случае при уравнивании следует исправить безошибочно измеренные стороны.

Уравнивание в предположении безошибочности исходных данных производится в настоящее время «из-за отсутствия другой возможности», [5, стр. 108]. Вместе с тем «нельзя считать нормальной такую обработку, которая превращает высокоточные сети сгущения в сети невысокого достоинства» [4, стр. 20].

Таким образом, становится несомненной актуальность разработки такого аппарата уравнивания, который не обладал бы указанными недостатками. Очевидно, что для решения этой задачи необходимо пересмотреть принцип уравнивания измерений в предположении безошибочности исходных данных. Наличие ошибок в исходных данных дает право на их исправление с целью повышения их точности.

В настоящее время опубликован ряд предложений по уравниванию геодезических построений с учетом ошибок исходных данных [6, 7, 4, 1]. Однако рассмотрение их показывает, что представленные предложения не решают задачу в целом и не дают общего математического аппарата.

Не следует смешивать поставленную здесь задачу с другой проблемой, решаемой рядом ученых в течение трех десятилетий, — каково влияние ошибок исходных данных на точность измерений, уравненных в предположении безошибочности исходных данных. Решение этой проблемы позволяет лишь выяснить качество уравненных таким образом измерений, но не устраняет указанных недостатков.

В настоящей статье предпринимается попытка дать общий математический аппарат уравнивания геодезических сетей с учетом ошибок исходных данных.

2. Общее решение вопроса

Несогласованность геометрических элементов неуравненной сети объясняется не только наличием ошибок в результатах измерений l_i , но и наличием ошибок в исходных данных d . Поэтому при распределении невязок часть их должна, естественно, приходиться на долю исходных данных. Иными словами, исходные данные должны получать поправки наряду с результатами измерений.

Для отыскания вероятнейших поправок в результаты измерений и исходные данные их необходимо совместно уравнивать. Поскольку исходные данные являются в общем-то зависимыми величинами, уравнивание необходимо выполнять по принципу наименьших квадратов, обобщенному на зависимые измерения:

$$v_{ld}^T \cdot Q_{ld}^{-1} \cdot v_{ld} = \min. \quad (1)$$

$1, n \quad n, n \quad n, 1$

Здесь v_{ld} — вектор поправок в результаты измерений l_i и исходные данные d_i , Q_{ld} — корреляционная матрица весовых коэффициентов результатов измерений и исходных данных. Полагаем, что уравниванию подлежат k результатов измерений и m исходных данных, так что

$$n = k + m. \quad (2)$$

При этом не исключается возможность совместного уравнивания наблюдаемой и исходной сети.

Результаты измерений не зависят от исходных данных, поэтому матрица Q_{ld} имеет следующую блочную форму:

$$Q_{ld} = \begin{vmatrix} Q_l & 0 \\ 0 & Q_d \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$n, n \quad k, k \quad m, m$

где Q_l — диагональная матрица весовых коэффициентов измеренных величин.

$$Q_l = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{l_1} & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ p_{l_2} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & p_{l_k} \end{vmatrix} = P_l^{-1}, \quad (4)$$

$k, k \quad k, k$

Q_d — корреляционная матрица весовых коэффициентов исходных данных.

$$Q_d = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ p_{d_1} & \sqrt{p_{d_1} p_{d_2}} & & \sqrt{p_{d_1} p_{d_m}} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \sqrt{p_{d_2} p_{d_1}} & p_{d_2} & & \sqrt{p_{d_2} p_{d_m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \\ \sqrt{p_{d_m} p_{d_1}} & \sqrt{p_{d_m} p_{d_2}} & & p_{d_m} \end{vmatrix} = P_d^{-\frac{1}{2}} \cdot R_d \cdot P_d^{-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$m, m \quad m, m \quad m, m$

R_d — матрица коэффициентов корреляции исходных данных с компонентами,

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}} = \frac{m_{ij}^2}{\sqrt{m_{ii}^2 m_{jj}^2}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

Из (3) следует

$$Q_{ld}^{-1} = \begin{vmatrix} Q_l^{-1} & 0 \\ 0 & Q_d^{-1} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Необходимо подчеркнуть, что обратная матрица весовых коэффициентов результатов измерений есть матрица их весов

$$Q_l^{-1} = P_l, \quad (8)$$

однако обратная матрица весовых коэффициентов исходных данных не является матрицей весов этих данных

$$Q_d^{-1} \neq P_d, \quad (9)$$

так как, согласно (5), имеем

$$Q_d^{-1} = P_d^1 \cdot R_d^{-1} \cdot P_d^1. \quad (10)$$

3. Совместное уравнивание результатов измерений и исходных данных способом необходимых неизвестных

Пусть имеем k результатов измерений l_i и m исходных данных d_j . Любые измерения, в том числе исходные данные, можно представить функцией от t необходимых неизвестных X , из которых u неизвестных являются косвенными измерениями X_l , а s неизвестных — исходными данными X_d , выступающими в качестве косвенных измерений, так что

$$n = k + m, \quad t = u + s, \quad n > t. \quad (11)$$

Параметрические уравнения поправок имеют общий вид

$$\left. \begin{aligned} l_i + v_{l_i} &= \varphi_{l_i}(X_{l_1}, \dots, X_{l_u}, X_{d_1}, \dots, X_{d_s}) \\ d_j + v_{d_j} &= \varphi_{d_j}(X_{l_1}, \dots, X_{l_u}, X_{d_1}, \dots, X_{d_s}) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (i &= 1, 2, \dots, k), \\ (j &= 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (12)$$

от которого можно перейти к линейной форме:

$$\left. \begin{aligned} v_{l_i} &= a_{l_{i1}} x_{l_1} + \dots + a_{l_{iu}} x_{l_u} + a_{d_{i1}} x_{d_1} + \dots + a_{d_{is}} x_{d_s} + \lambda_{l_i} \\ v_{d_j} &= a_{l_{j1}} x_{l_1} + \dots + a_{l_{ju}} x_{l_u} + a_{d_{j1}} x_{d_1} + \dots + a_{d_{js}} x_{d_s} + \lambda_{d_j} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $a_l = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_l}$, $a_d = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_d}$, $a_l = \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_l}$, $a_d = \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d}$ — коэффициенты; x_{l_g} , x_{d_h} ($g = 1, 2, \dots, u$; $h = 1, 2, \dots, s$) — поправки в необходимые неизвестные; $\lambda_{l_i} = \varphi_{l_i}(X_{l_1}^0, \dots, X_{d_s}^0) - l_i$; $\lambda_{d_j} = \varphi_{d_j}(X_{l_1}^0, \dots, X_{d_s}^0) - d_j$ — свободные члены.

Коэффициенты параметрических уравнений поправок образуют матрицу

$$A_{n,t}^{ld} = \begin{vmatrix} a_{l_{II}} & \dots & a_{l_{Iu}} & a_{d_{II}} & \dots & a_{d_{Is}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l_{k1}} & \dots & a_{l_{ku}} & a_{d_{k1}} & \dots & a_{d_{ks}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l_{II}} & \dots & a_{l_{Iu}} & a_{d_{II}} & \dots & a_{d_{Is}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l_{m1}} & \dots & a_{l_{mu}} & a_{d_{m1}} & \dots & a_{d_{ms}} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

которую можно представить в блочной форме

$$A_{n,t}^{ld} = \begin{vmatrix} A_l \\ \dots \\ A_d \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Если принять, что x_{ld} — вектор поправок в необходимые неизвестные, λ_{ld} — вектор свободных членов, v_{ld} — вектор поправок в результаты измерений и исходные данные, то систему параметрических уравнений поправок можно представить в матричном виде

$$A_{n,t}^{ld} \cdot x_{t,1}^{ld} + \lambda_{n,1}^{ld} = v_{n,1}^{ld}. \quad (16)$$

Решая выражение (16) в соответствии с принципом (1), приходим к матричной форме нормальных уравнений.

$$A_{t,n}^{ldT} \cdot Q_{n,n}^{-1} \cdot A_{n,t}^{ld} \cdot x_{t,1}^{ld} + A_{t,n}^{ldT} \cdot Q_{n,n}^{-1} \cdot \lambda_{n,1}^{ld} = A_{t,n}^{ldT} \cdot Q_{n,n}^{-1} \cdot v_{n,1}^{ld} = 0, \quad (17)$$

откуда находим вектор поправок в необходимые неизвестные

$$-x_{t,1}^{ld} = (A_{t,n}^{ldT} \cdot Q_{n,n}^{-1} \cdot A_{n,t}^{ld})^{-1} \cdot A_{t,n}^{ldT} \cdot Q_{n,n}^{-1} \cdot \lambda_{n,1}^{ld}. \quad (18)$$

Представим выражение (18) в блочной форме

$$\begin{aligned} -x_{t,1}^{ld} = & \left(\begin{vmatrix} A_l^T & A_d^T \\ t,k & t,m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_l^{-1} & 0 \\ k,k & k,m \\ 0 & Q_d^{-1} \\ m,k & m,m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_l \\ A_d \\ k,t \\ m,t \end{vmatrix} \right)^{-1} \times \\ & \times \begin{vmatrix} A_l^T & A_d^T \\ t,k & t,m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_l^{-1} & 0 \\ k,k & k,m \\ 0 & Q_d^{-1} \\ m,k & m,m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{k,1} \\ \lambda_{m,1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

После перемножения блоков в (19) приходим к окончательному выражению

$$\boxed{-x_{t,1}^{ld} = (A_l^T \cdot Q_l^{-1} \cdot A_l + A_d^T \cdot Q_d^{-1} \cdot A_d)^{-1} \cdot (A_l^T \cdot Q_l^{-1} \cdot \lambda_l + A_d^T \cdot Q_d^{-1} \cdot \lambda_d)} \quad (20)$$

Структура полученного общего выражения дает четкое представление о механизме совместного уравнивания результатов измерений и исходных данных.

В частном случае при действительно безошибочных исходных данных выражение (20) принимает вид

$$-x_{l,1} = (A_{l,1}^T \cdot Q_{l,1}^{-1} \cdot A_{l,1})^{-1} \cdot A_{l,1}^T \cdot Q_{l,1}^{-1} \cdot l_{l,1} \quad (21)$$

Уравнивание по формуле (20) несколько упрощается, если $\lambda_d = 0$

$$-x_{ld} = (A_{l,1}^T \cdot Q_{l,1}^{-1} \cdot A_{l,1} + A_{d,1}^T \cdot Q_{d,1}^{-1} \cdot A_{d,1})^{-1} \cdot A_{l,1}^T \cdot Q_{l,1}^{-1} \cdot l_{l,1} \quad (22)$$

Во многих случаях уравнивания матрица A_d будет состоять из двух блоков — нулевой матрицы и единичной

$$A_d = \begin{pmatrix} 0 & E \\ m, u & m, m \end{pmatrix} \quad (m = s),$$

что также внесет упрощение в вычислительный процесс, поскольку в формуле (22)

$$A_d^T \cdot Q_d^{-1} \cdot A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u, u & u, m \\ 0 & Q_d^{-1} \\ m, u & m, m \end{pmatrix}.$$

4. Совместное уравнивание результатов измерений и исходных данных способом условий

Пусть имеем k результатов измерений l_i и m исходных данных d_j — всего $n = k + m$ величин. Положим, что из этих n величин избыточным является r величин: избыточные результаты измерений и избыточные исходные данные.

Избыточные величины являются причиной появления r условных уравнений поправок, представляемых в общей форме

$$\psi_i(l_1 + v_{l_1}, \dots, l_k + v_{l_k}, d_1 + v_{d_1}, \dots, d_m + v_{d_m}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (23)$$

или в линейном виде

$$b_{i1} v_{l_1} + \dots + b_{ik} v_{l_k} + \beta_{i1} v_{d_1} + \dots + \beta_{im} v_{d_m} + \omega_i = 0, \quad (24)$$

где $b_{ih} = \frac{\partial \psi_i}{\partial l_h}$, $\beta_{ig} = \frac{\partial \psi_i}{\partial d_g}$ — коэффициенты; v_{l_i} , v_{d_j} — поправки в результаты измерений и в исходные данные; $\omega_i = \psi_i(l_1, \dots, l_k, d_1, \dots, d_m)$ — свободные члены (невязки).

Коэффициенты условных уравнений поправок образуют матрицу

$$B_{ld} = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1k} & \beta_{11} \dots \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{r1} \dots b_{rk} & \beta_{r1} \dots \beta_{rm} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

которую можно представить в блочной форме

$$B_{ld} = \begin{pmatrix} B_l & B_d \\ r, k & r, m \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Условимся обозначать: v_{ld} — вектор поправок в результаты измерений и в исходные данные, ω — вектор невязок, k — вектор коррелят. С уче-

5. Средняя квадратическая ошибка единицы веса

В соответствии с известными положениями об оценке точности результатов уравнивания зависимых величин [2, 5], средняя квадратическая ошибка единицы веса μ_{ld} при совместном уравнивании результатов измерений и исходных данных вычисляется по формуле

$$\mu_{ld}^2 = \frac{v_{ld}^T \cdot Q_{ld}^{-1} \cdot v_{ld}}{r} \quad (37)$$

Подставляя (31) в (37), находим

$$\mu_{ld}^2 = \frac{\omega^T \cdot (B_{ld} \cdot Q_{ld} \cdot B_{ld}^T)^{-1} \cdot B_{ld}^T \cdot Q_{ld} \cdot Q_{ld}^{-1} \cdot Q_{ld} \cdot B_{ld}^T \cdot (B_{ld} \cdot Q_{ld} \cdot B_{ld}^T)^{-1} \cdot \omega}{r} \quad (38)$$

откуда

$$\mu_{ld}^2 = \frac{\omega^T \cdot (B_{ld} \cdot Q_{ld} \cdot B_{ld}^T)^{-1} \cdot \omega}{r} \quad (39)$$

Обозначим матрицу коэффициентов нормальных уравнений при уравнивании по способу условий через N_{ld} . Тогда выражение (39) можно представить равенством

$$\mu_{ld}^2 = \frac{\omega^T \cdot N_{ld}^{-1} \cdot \omega}{r} \quad (40)$$

которое с учетом блочных форм (3), (26) преобразуется к виду

$$\mu_{ld}^2 = \frac{\omega^T \cdot (N_l + N_d)^{-1} \cdot \omega}{r} \quad (41)$$

Понятно, что при уравнивании в предположении безошибочности исходных данных вместо (41) имеем

$$\mu_{l0}^2 = \frac{\omega^T \cdot (N + 0)^{-1} \cdot \omega}{r} \quad (42)$$

Сопоставляя (41) и (42), легко прийти к весьма важному выводу:

$$\mu_{ld} < \mu_{l0} \quad (43)$$

С другой стороны, блочные формы (3), (32) позволяют представить выражение (37) в виде

$$\mu_{ld}^2 = \frac{v_l^T \cdot Q_l^{-1} \cdot v_l}{r} + \frac{v_d^T \cdot Q_d^{-1} \cdot v_d}{r} \quad (44)$$

или

$$\mu_{ld}^2 = \mu_l^2 + \mu_d^2 \quad (45)$$

Интересно теперь сопоставить μ_l из (45) и μ_{l0} из (42). С этой целью подставим (34) в первое слагаемое выражение (44), тогда

$$\mu_l^2 = \frac{\omega^T \cdot (B_l \cdot Q_l \cdot B_l^T + B_d \cdot Q_d \cdot B_d^T)^{-1} \cdot B_l \cdot Q_l \cdot Q_l^{-1} \cdot Q_l \cdot B_l^T \times \\ \times (B_l \cdot Q_l \cdot B_l^T + B_d \cdot Q_d \cdot B_d^T)^{-1} \cdot \omega}{r} \quad (46)$$

откуда

$$\mu_l^2 = \frac{\omega^T \cdot \frac{(N_l + N_d)^{-1} \cdot N_l \cdot (N_l + N_d)^{-1} \cdot \omega}{r, r}}{r} \quad (47)$$

При уравнивании в предположении безошибочности исходных данных вместо (47), согласно (42), получаем

$$\mu_{l_0}^2 = \frac{\omega^T \cdot \frac{(N_l + 0)^{-1} \cdot N_l \cdot (N_l + 0)^{-1} \cdot \omega}{r, r}}{r} \quad (48)$$

Сопоставление (47) и (48) позволяет сделать следующий вывод:

$$\mu_l < \mu_{l_0} \quad (49)$$

Итак, учитывая (45), имеем

$$\mu_l < \mu_{ld} < \mu_{l_0} \quad (50)$$

Из (43), (49), (50) следует, что уравнивание с учетом ошибок исходных данных позволяет определять действительно вероятные значения элементов геодезических сетей; при этом результаты получаются с более высокой точностью, чем при уравнивании по применяемому в настоящее время принципу, когда исходные данные условно считаются безошибочными.

* * *

Сопоставляя структуры формул (20) и (34), (35), можно прийти к предварительному выводу, что совместное уравнивание результатов измерений и исходных данных по способу условий может оказаться более выгодным, чем уравнивание по способу необходимых неизвестных, поскольку при этом, во-первых, нет необходимости перед уравниванием обращать матрицы весовых коэффициентов Q_l и Q_d , и, во-вторых, по мере увеличения числа исходных данных размер r матрицы нормальных уравнений изменяется медленнее, чем l .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдаев П. А. Некоторые вопросы уравнивания и оценки точности основных геодезических сетей СССР. Известия вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 5, 1967.
2. Кемниц Ю. В. К обоснованию метода (способа) наименьших квадратов. Труды МИИЗ, вып. 22, М., 1964.
3. Коулия В. А. Влияние ошибок в исходных данных на результаты уравнивания. Известия вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 6, 1967.
4. Судаков С. Г. К вопросу о главной геодезической основе страны. «Геодезия и картография», 2, 1968.
5. Христов В. К. Расширение уравнивания по способу наименьших квадратов. Труды центр. геол. лаб., № 12, Издание БАН, София, 1966.
6. Hausbrandt St. Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbledności punktów nawiazania, Geodezja i kartografia, t. III, z. 1, 1954.
7. Janusz W. Wpływ nawiązania sieci geodezyjnej na wyniki wyrównania i oceny dokładności. Prace instytutu geodezji i kartografii, t. XII, z. 3 (27), 1965.

Работа поступила
23 декабря 1968 года.