КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.235

А. С. ЛИСИЧАНСКИЙ

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ АЗИМУТАЛЬНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Азимутально-цилиндрическими проекциями мы называем такие, которые охватывают собой два известных класса проекций: азимутальные и цилиндрические. Последние являются некоторыми частными видами проекций относительно азимутально-цилиндрических. Характерная особенность азимутально-цилиндрических проекций — возможность управления формой изокол. В общем случае они представляют собой эллипсы, степень сжатия которых определяется выбором некоторой произвольной постоянной k, где $0 \leqslant k \leqslant 1$. Если $k=0$, то изоколы обращаются в концентрические окружности, и мы получим известную азимутальную проекцию. При $k=1$ изоколы имеют вид параллельных прямых и мы придем к известной цилиндрической проекции. Если же $0<k<1$, то изоколы представляют собой эллипсы и мы получим собственно азимутально-цилиндрическую проекцию, которая соответствующим выбором числового значения величины k может быть приспособлена к изображению той или иной области, если очертания ее примерно вписываются в эллипс.

Примем поверхность земли за шар радиуса, равного единице. Положение точек на земном шаре будем выражать сферическими координатами a, z, полюс которых расположен в некоторой центральной точке изображаемой области, а полярная ось перпендикулярна направлению вытянутости области.

Систему плоских прямоугольных координат xOy располагаем так, чтобы ее начало совпадало с центральной точкой изображаемой области, а положительное направление оси абсцисс — с изображением полярной оси системы сферических координат.

Известно, что абсциссы точек эквивалентной азимутальной проекции (Ламберта) выражаются формулой

$$x = 2 \sin \frac{z}{2} \cos a, \tag{1}$$

а эквивалентной цилиндрической проекции (косой изоцилиндрической) — формулой

$$x = \sin z \cos a. \tag{2}$$

Сопоставляя формулы (1) и (2), видим, что для абсцисс точек обобщенного класса эквивалентных азимутально-цилиндрических проекций можно принять выражение

$$x = \zeta \cos a, \tag{3}$$

где ζ — некоторая регулярная и дважды непрерывно дифференцируемая в заданной области функция зенитного расстояния z и произвольной постоянной k, причем такая, что при $k=0$ $\zeta=2\sin\frac{z}{2}$, а при $k=1$ $\zeta=\sin z$.

Если система уравнений

$$x=x(a,z),\ y=y(a,z) \tag{4}$$

выражает собой эквивалентное отображение шара на плоскости, то якобиан этой системы удовлетворяет условию

$$\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial z}=\sin z. \tag{5}$$

В нашем случае, согласно формуле (3), получаем

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\zeta'\cos a,\quad \frac{\partial x}{\partial a}=-\zeta\sin a, \tag{6}$$

где

$$\zeta'=\frac{d\zeta}{dz}. \tag{7}$$

Поэтому для нахождения отображающей функции $y=y(a,z)$ системы (4) имеем такое дифференциальное уравнение в частных производных

$$\zeta\sin a\frac{\partial y}{\partial z}+\zeta'\cos a\frac{\partial y}{\partial a}=\sin z. \tag{8}$$

Соответствующая ему система обыкновенных дифференциальных уравнений запишется так:

$$\frac{dz}{\zeta\sin a}=\frac{da}{\zeta'\cos a}=\frac{dy}{\sin z}. \tag{9}$$

Из комбинации $\frac{dz}{\zeta\sin a}=\frac{da}{\zeta'\cos a}$ найдем первый независимый интеграл уравнения (8)

$$\zeta\cos a=c_1. \tag{10}$$

Из комбинации $\frac{da}{\zeta'\cos a}=\frac{dy}{\sin z}$ получаем второй независимый интеграл того же уравнения

$$y-\int\frac{\sin z da}{\zeta'\cos a}=c_2. \tag{11}$$

Нам нет необходимости записывать выражение для общего интеграла уравнения (8) в виде произвольной функции от выражений (10) и (11), так как, учитывая, что при $z=0$ или $a=0$, $y=0$, получаем $c_2=0$ и, следовательно, для вычисления y находим такой определенный интеграл:

$$y=\int\limits_{a_i=0(\pi)}^{a_i=a}F da_i, \tag{12}$$

где

$$F=\frac{\sin z_i}{\zeta_i'\cos a_i}. \tag{13}$$

В двух последних формулах индекс i при величинах z и ζ' указывает на то, что при нахождении численным методом определенного интеграла (12) эти величины должны быть предварительно получены для каждого соответствующего фиксированного через постоянный шаг значения азимута a_i. Для этого по формулам (3) и (10) имеем

$$\zeta_i \cos a_i = c_1 = x \tag{14}$$

или

$$\zeta_i \cos a_i = \zeta \cos a. \tag{15}$$

Пусть, например,

$$\zeta = 2 \sin \frac{z}{2} - k\left(2 \sin \frac{z}{2} - \sin z\right), \tag{16}$$

где k — произвольная постоянная. Тогда

$$\zeta_i' = \cos \frac{z_i}{2} - k\left(\cos \frac{z_i}{2} - \cos z_i\right), \tag{17}$$

а для вычисления зенитных расстояний z_i методом последовательных приближений можем воспользоваться формулой

$$\sin \frac{z_i}{2} = \frac{x}{2 \cos a_i} : \left[1 - k\left(1 - \cos \frac{z_i}{2}\right)\right]. \tag{18}$$

Не останавливаясь детально на вопросе вычисления экстремальных масштабов и максимального искажения углов в произвольной точке, что хорошо известно из общей теории картографических проекций, укажем на методику определения необходимых для этого четырех частных производных $\dfrac{\partial x}{\partial z}, \dfrac{\partial x}{\partial a}, \dfrac{\partial y}{\partial z}, \dfrac{\partial y}{\partial a}$.

Для первых двух из них имеем формулы (6). Две другие можем получить дифференцированием интеграла (12) по периметрам z и a, как величинам, постоянным для данной точки. Поэтому, учитывая формулы (13) и (17), имеем

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \int\limits_{a_i = 0(\pi)}^{a_i = a} F_z' \, da_i \quad \text{и} \quad \frac{dy}{da} = \int\limits_{a_i = 0(\pi)}^{a_i = a} F_a' \, da_i + (F)_{a_i} = a, \tag{19}$$

где

$$F_z' = \frac{\zeta' \cos a}{(\zeta_i' \cos a_i)^2}\left(\cos z_i - \frac{\zeta_i''}{\zeta_i'} \sin z_i\right), \tag{20}$$

$$F_a' = \frac{\zeta \sin a}{(\zeta_i' \cos a_i)^2}\left(\cos z_i - \frac{\zeta_i''}{\zeta_i'} \sin z_i\right), \tag{21}$$

$$\zeta_i'' = -\frac{1}{2} \sin \frac{z_i}{2} - k\left(\sin z_i - \frac{1}{2} \sin \frac{z_i}{2}\right). \tag{22}$$

Определенные интегралы (19), так же, как и интеграл (12), не могут быть выражены в элементарных функциях, поэтому они должны быть найдены методом численного интегрирования.

Работа поступила
28 апреля 1969 года