

Л. С. ХИЖАК

О ВОЗМОЖНОСТИ ФИКСАЦИИ НАПРАВЛЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ

Рассмотрим теоретические основы метода, позволяющего фиксировать в приземном слое воздуха истинное значение направления на визирную цель по результатам измерений давления на одной высоте, температуры — на двух высотах и двух зенитных расстояний, соответствующих различным стратификациям приземного слоя воздуха. Задача решается для равнинной местности с однородной подстилающей поверхностью и малых расстояний.

Уравнение световой кривой для этих условий можно представить рядом Тейлора

$$z = z'_0 x + \frac{z''_0}{2} x^2 + \dots, \quad (1)$$

где z'_0, z''_0 — производные от z по x в начале координат, причем $z'_0 = \operatorname{tg} \alpha$; α — угол наклона. Зависимость (1) является решением уравнения Эйлера вида

$$nz'' = n'_z(1 + z'^2), \quad (2)$$

где n — показатель преломления как функция z ; n'_z — производная от n по z .

Пусть теперь при двух состояниях атмосферы измерены углы наклона на одну и ту же визирную цель, давление и температура на разных высотах в моменты фиксации зенитных расстояний. Обозначим результаты измерений при двух состояниях атмосферы соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, P_{01}, P_{02}, T_{z_1}, T_{z_2}, T_{z_3} \dots T'_{z_1}, T'_{z_2}, T'_{z_3} \dots$. Тогда уравнение (1) для первого состояния атмосферы перепишем в виде

$$z_1 = x \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{z''_{01}}{2!} x^2 + \dots, \quad (3)$$

а для второго состояния

$$z_2 = x \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{z''_{02}}{2!} x^2 + \dots \quad (4)$$

Так как кривые пересекаются в точке, из которой приходит излучение, то можно написать

$$x \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{z''_{01}}{2!} x^2 = x \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{z''_{02}}{2!} x^2,$$

откуда получим абсциссы точки пересечения кривых

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= -2 \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}}, \end{aligned} \quad (5)$$

а выражения для ординат получим, если подставим значения абсциссы (5) в (3) и (4):

$$z_1 = -2 \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}} \right) \operatorname{tg} \alpha_1 - 2 \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}} \right)^2 z''_{01}; \quad (6)$$

$$z_2 = -2 \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}} \right) \operatorname{tg} \alpha_2 - 2 \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}} \right)^2 z''_{02}. \quad (7)$$

Истинное направление на точку визирования получим из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha = z_1/x_2 = z_2/x_2; \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 - z''_{01} \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}}; \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_2 - z''_{02} \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{z''_{01} - z''_{02}}. \quad (10)$$

Или учитывая, что углы α , α_1 и α_2 мало отличаются между собой (на поправку за рефракцию), можно записать

$$\alpha = \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \delta\alpha_1.$$

Разлагая $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$ в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми членами разложения для поправки $\Delta\alpha_1$, получаем формулу

$$\Delta\alpha_1 = z_{01}'' \frac{\delta\alpha_1}{z_{01}'' - z_{02}''}. \quad (11)$$

Аналогично, полагая $\alpha = \alpha_2 + \Delta\alpha_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 + \delta\alpha_2$, имеем

$$\Delta\alpha_2 = -z_{02}'' \frac{\delta\alpha_2}{z_{01}'' - z_{02}''}. \quad (12)$$

Очевидно, что здесь $\delta\alpha_1 = -\delta\alpha_2$.

Таким образом, формулы (11) и (12) решают задачу об определении поправок за рефракцию, если известны разность измеренных углов наклона и вторые производные в начале координат, соответствующие первому и второму состояниям приземного слоя воздуха. При решении задачи мы оборвали ряд (1) на втором члене. Для малых расстояний это правомерно, так как остальные члены ряда пренебрежимо малы.

Для нахождения производных z_{01}'' и z_{02}'' воспользуемся уравнением (2), откуда

$$z_{01}'' = \frac{n_{01}'}{n_{01}} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1); \quad z_{02}'' = \frac{n_{02}'}{n_{02}} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2). \quad (13)$$

Здесь n_{01}' , n_{02}' — первые производные по z от показателя преломления в начале координат, соответствующие первому и второму состояниям приземного слоя воздуха. Необходимо отметить, что зависимость (2) справедлива только для того случая, когда n от x не зависит, т. е. когда n является одинаковой функцией от z во всем интервале x прохождения визирного луча. Для определения n_{01}' , n_{02}' , n_{01} и n_{02} необходимо знать функциональную зависимость n от z . С целью отыскания этой зависимости опишем состояние приземного слоя воздуха следующей системой уравнений:

$$\rho = \mu P / RT, \quad g\rho = -dP/dz, \quad (14)$$

которая с высокой степенью точности характеризует приземный слой воздуха. Здесь ρ — плотность воздуха; R — газовая постоянная; μ — масса моля; g — ускорение силы тяжести.

Будем находить решение этой системы в виде ряда

$$P = P_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (15)$$

Для решения задачи (14), (15) необходимо знать функциональную зависимость T от z . Для ее отыскания представим эту зависимость также в виде степенного ряда, т. е.

$$T = T_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots, \quad (16)$$

в котором коэффициенты t_1 , $t_2 \dots$ можно определить из измерений

температуры на различных высотах. Так, по измерениям температуры на двух высотах можно вычислить коэффициент по формуле

$$t_1 = \frac{T_{z_2} - T_{z_1}}{z_2 - z_1}, \quad (17)$$

т. е. в этом случае предполагается, что T линейно меняется с высотой; t_1 — градиент температуры в интервале $[z_1, z_2]$. В случае измерения температуры на трех высотах можно определить коэффициенты t_1 и t_2 :

$$t_1 = \frac{\Delta t_1 - t_2 \Delta z_1^2}{\Delta z_1}, \quad t_2 = \frac{\Delta t_2 \Delta z_1 - \Delta t_1 \Delta z_2}{\Delta z_1 \Delta z_2^2 - \Delta z_2 \Delta z_1^2}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= T_{z_2} - T_{z_1}; & \Delta t_2 &= T_{z_3} - T_{z_1}; \\ \Delta z_1 &= z_2 - z_1; & \Delta z_2 &= z_3 - z_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая (18) для коэффициентов p_1 , p_2 и p_3 , при решении системы (14) находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{P_0}{T_0} g^{\frac{\mu}{R}}, \\ p_2 &= \frac{-g^{\frac{\mu}{R}} p_1 - p_1 t_1}{2T_0}, \\ p_3 &= \frac{-g^{\frac{\mu}{R}} p_2 - p_1 t_2 - 2p_2 t_1}{3T_0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая формулу Дала-Гладстона

$$n = 1 + \beta \rho, \quad (21)$$

для показателя преломления получаем выражение

$$n = 1 + \frac{\beta \mu}{R} \left(\frac{P_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots}{T_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots} \right), \quad (22)$$

а для градиента показателя преломления по z — зависимость

$$\begin{aligned} n'_z &= \frac{\beta \mu}{R} \left[\frac{(p_1 + 2p_2 z + \dots)}{(T_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(t_1 + 2t_2 z + \dots)(P_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots)}{(T_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots)^2} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Показатель преломления и его градиент в начале координат, т. е. когда $z=0$, определяем из следующих формул:

$$n_0 = 1 + \frac{\beta \mu P_0}{R T_0},$$

$$n'_0 = \frac{p_1}{T_0 R} (p_1 T_0 - t_1 P_0). \quad (24)$$

Таким образом, формулы (11)—(13), (17), (20) и (24) являются решением задачи определения истинного значения направления на визирную цель по измеренным значениям метеозлементов и зенитных расстояний при двух состояниях приземного слоя воздуха. Как видно из этих формул, определение поправок за рефракцию не требует знания расстояния от точки наблюдения до визирной цели.

Заметим, что если световую кривую аппроксимировать двумя членами ряда, то для решения задачи по данной методике достаточно измерить температуру на двух высотах и вычислять только коэффициенты t_1 и p_1 , причем результаты измерений должны быть репрезентативными, т. е. соответствовать моменту определения зенитных расстояний, и характеризовать путь прохождения визирного луча.

Для проверки указанной методики мы использовали экспериментальный материал измерений метеорологических элементов и зенитных расстояний над железной дорогой. В этом эксперименте одновременно измеряли давление и температуру на двух высотах (10 и 60 см над полотном железной дороги у инструмента) и зенитные расстояния на визирную цель, находящуюся в 516 м от инструмента. Наблюдения проводили в светлое время суток. Визирный луч проходил в среднем на высоте 30 см над полотном железной дороги. На такой высоте в дневное время суток очень быстро меняются как температура, так и зенитные расстояния, и поэтому измерения температуры психрометрами, которые имеют инерционность около 3 мин., не соответствуют условиям прохождения визирного луча. Поэтому для вычисления поправок за рефракцию мы пользовались не измерениями, полученными из одного приема, а средними значениями. Для этого все измерения разбили на четыре группы: в первую группу включали результаты измерений метеозлементов и зенитных расстояний, для которых разность температур между высотами 10 и 60 см лежали в пределах 0,3 ... 0,0 °C, для второй, третьей и четвертой соответственно — в пределах 0,0 ... 0,3; +0,3 ... +0,6; 0,4 °C. В первую, вторую и третью группы вошло по 16 приемов, а в четвертую 15. Для каждой из групп образовывались средние значения вертикальной разности температур, давления и углов наклона. Эти данные и результаты вычисления вторых производных приведены в табл. 1.

В табл. 1 приняты следующие обозначения; z_0 и z_1 — высоты измерения температуры относительно начала координат (начала световой кривой), м; Δz — разность высот; ΔT — разность температур между этими высотами, К; t_1 — градиент температуры; T'_0 — температура в начале координат ($T'_0 = T_0 + t_1 \Delta z$); P_0 — давление в начале координат, Па; p_1 — градиент давления, Па/м; n_0 — показатель преломления в начале координат; n'_0 — градиент показателя преломления, 1/м; z''_0 — вторая производная в начале координат, 1/м²; α' — измеренный угол наклона, ..."

По приведенным в табл. 1 значениям z_0'' и α' вычислены истинные значения углов наклона и поправок за рефракцию для каждой пары состояний атмосферы (I—II, I—III, I—IV, II—III, II—IV, III—IV). Таким образом, получено шесть значений истинного угла наклона. Эти результаты вычислений приведены в табл. 2.

Как видно из табл. 2, все пары кривых, соответствующих различным состояниям атмосферы, кроме последней (III—IV), дают хорошо согласованные значения истинного угла наклона α и по-

Таблица 1

Вычисление вторых производных

Показатели	Группы			
	I	II	III	IV
z_0	— 0,188	— 0,188	— 0,188	— 0,188
z_1	+ 0,312	+ 0,312	+ 0,312	+ 0,312
Δz	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,500
ΔT	+ 0,120	— 0,188	— 0,463	— 0,537
t_1	+ 0,240	— 0,376	— 0,926	— 1,074
T_0'	285,84	288,52	290,58	291,38
P_0	99958	99614	99828	100220
P_1	—11,951	+11,800	—11,741	—11,755
n_0	— 0,3354 · 10 ⁻⁶	+ 0,4091 · 10 ⁻⁶	+ 1,0544 · 10 ⁻⁶	+ 1,2215 · 10 ⁻⁶
n_0'	1,0003498	1,0003454	1,0003436	1,0003441
z_0''	— 0,3354	+ 0,4091	+ 1,0544	+ 1,2275
α	182,50''	166,59''	151,23''	148,47''

Примечание. $\mu=28,966$ кг/кмоль; $R=8,31436 \cdot 10^3$ Дж/град·кмоль; $g=9,81$ м/с; $\beta=0,000292$ м²/кг.

Таблица 2

Вычисление истинных направлений

Показатель	Пары состояний атмосферы					
	I—II	I—III	I—IV	II—III	II—IV	III—IV
$10^{-6} z_{01}''$	—0,3355	—0,3335	—0,3355	+0,4091	+0,4091	+1,0544
$10^{-6} z_{02}''$	+0,4091	+1,0544	+1,2275	+1,0544	+1,2275	+1,2275
$10^{-6} \Delta z_0''$	—0,7446	—1,3899	—1,5630	—0,6453	—0,8184	—0,1731
α_1''	182,50	182,50	182,50	166,59	166,59	151,23
α_2''	166,59	151,23	148,47	151,23	148,47	148,47
$\Delta \alpha_1''$	+15,91	—31,27	—34,03	—15,36	—18,12	—2,74
α''	—7,17	—7,54	—7,30	+9,74	+9,06	+16,81
$\Delta \alpha_2''$	175,33	174,96	175,20	176,33	175,65	168,04
α''	+8,74	+23,72	+26,72	+25,10	+27,18	+19,57
α''	175,33	174,95	175,19	176,33	175,65	168,04

правок за рефракцию $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$. Шестая пара явно не согласуется с результатами остальных, так как разность углов наклона составляет всего $2,7''$, что практически близко к случаю, когда кривые совпадают и тогда определить этим методом рефракцию невозможно. Вопрос корректности задачи требует дальнейших исследований.

Приведенные формулы и методика определения истинного направления по результатам измерения метеоэлементов и зенитных расстояний при различных состояниях атмосферы справедлива только для однородных, равнинных, поверхностей при малых расстояниях. Особенное внимание нужно уделять измерениям температуры, которые должны строго соответствовать измерениям зенитных расстояний.