

К ВОПРОСУ ТОЧНОСТИ
НЕСВОБОДНЫХ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Закономерности накопления погрешностей в свободных сетях трилатерации изучены достаточно полно [2—4, 6]. Этому вопросу в несвободных сетях пока уделено мало внимания. Исследована точность несвободных рядов трилатерации [1] и точность дирекционных углов в несвободных сетях трилатерации [5]. Проведенные нами исследования посвящены изучению накопления погрешностей в несвободных сетях трилатерации.

Рассмотрим макеты сетей трилатерации, имеющие прямоугольное очертание, т. е. расположенные как бы внутри прямоугольника, и построенные из равносторонних треугольников (см. рисунок). Примем, что в сетях имеются четыре исходных пункта, расположенных в вершинах ограничивающего сети прямоугольника, и два исходных дирекционных угла. На рисунках исходные пункты обозначены треугольничками, а стороны с исходными дирекционными углами — двойными линиями.

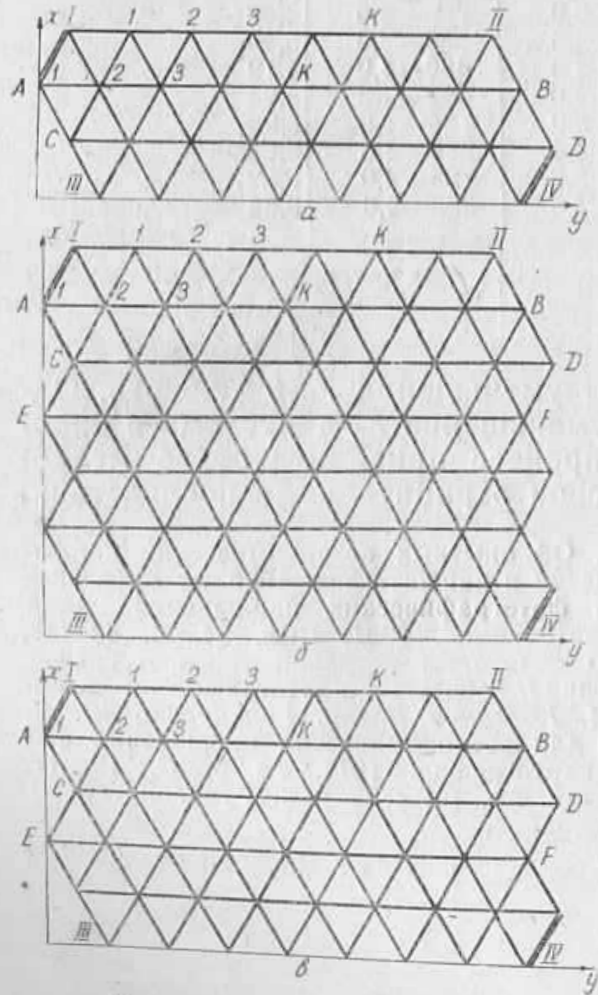


Схема несвободных сетей
а) — из трех рядов; б) из пяти рядов; в) из семи рядов треугольников.

Первым эквивалентом сплошной несвободной сети принята сеть, состоящая из трех рядов треугольников. Далее рассматривалась сеть из пяти рядов и, наконец, сеть из семи рядов. Это позволило выявить влияние числа рядов n , из которого состоит сеть, на точность положения пунктов.

При любом числе рядов в сети ее конфигурация выбиралась такой, чтобы в каждом ее двухкратном ряду было одинаковое число центральных систем. Обозначим его N . Для выявления влияния числа фигур в одном ряду сетей на точность положения пунктов рассматриваем трех-, пяти- и семикратные ряды, в которых $N=5, 10, 15, 20$ и 25 . Таким образом исследовано всего 15 макетов сети.

Точность положения пунктов сетей характеризовалась средними квадратическими ошибками координат. Чтобы ошибки координат практически совпадали с продольными и поперечными сдвигами пунктов, этими наиболее показательными характеристиками точности их положения, исследуемые сети ориентированы вдоль оси ординат (см. рисунок). При этом средняя квадратическая ошибка абсцисс практически равна продольному, а ошибка ординат — поперечному сдвигам пункта.

Средние квадратические ошибки координат оцениваемых пунктов вычисляем по обратным весам, определенным коррелятным способом с использованием ЭВМ по составленной нами программе.

Для каждого макета сети составлены все возникающие в нем условные уравнения: $N(n-1)$ условных уравнений центральных систем, шесть условных уравнений координат и одно условное уравнение дирекционных углов. В первом из пяти макетов сети из трех рядов возникает 17, во втором — 27, третьем — 37, четвертом — 47 и пятом — 57 условных уравнений. В макетах сетей, из пяти рядов их число соответственно равно 27, 47, 67, 87 и 107, а в макетах сети из семи рядов — 37, 67, 97, 127 и 157.

Проводим оценку точности только тех пунктов, которые располагались в верхней половине сети. В трехкратных рядах оцениваем пункты диагоналей $I\ II$ и AB , в пятикратных — $I\ II$, AB и CD , а в семикратных — $I\ II$, AB , CD и EF . Благодаря симметричному строению сетей, результаты, полученные для их верхней половины, можно распространить и на их нижнюю часть.

В сетях с $N=5$ и 10 оцениваем все пункты верхней половины сетей. В сетях с $N=15$ и 20 оцениваем на каждой диагонали по три крайних пункта слева и справа и пять пунктов, расположенных посередине диагоналей. А при $N=25$ кроме этих пунктов оцениваем по два пункта, удаленных от левого и правого краев сети примерно на четверть длины диагонали. Таким образом, в первом макете сети из трех рядов треугольников к условным уравнениям присоединялись 22, во втором 42, третьем 44, четвертом 44 и пятом 60 весовых функций. В макетах сетей из пяти рядов число весовых функций соответственно равно 36, 66, 66, 66 и 107, а в макетах сетей из семи рядов — 50, 88, 88, 88 и 120.

Выявленные закономерности в образовании элементов матрицы коэффициентов нормальных уравнений и векторов «нормальных» весовых функций [5] позволили составить программы, формирующие их. Общая программа для проведения вычислений построена следующим образом. Задавались размеры сети, т. е. n и N . Соответственно этим значениям машина формировала матрицу коэффициентов нормальных уравнений. Далее проводятся вычисления для исключения неизвестных из системы нормальных уравнений. Результаты их помещаются в верхней треугольной части матрицы. В нижней треугольной ее части записываются вспомогательные величины, позволяющие провести исключение неизвестных из «нормальных» весовых функций. На этом заканчиваются вычисления первой части программы.

Во второй части программы задаем номер K оцениваемого пункта диагонали I II и на его основании машина формирует вектор коэффициентов «нормальной» весовой функции абсциссы K -го пункта. Он присоединяется как последний столбец к матрице, полученной после выполнения первой части программы. В присоединенном столбце проводятся вычисления, связанные с исключением неизвестных из данной «нормальной» весовой функции.

Таблица 1

Средние квадратические ошибки
координат пунктов
трехкратного ряда

 $\mu = 1 \text{ см}$

Диагональ IP			Диагональ AB		
K	m_x	m_y	K	m_x	m_y

 $N = 10$

1	1,2	0,8	1	0,8	0,4
2	1,5	1,0	2	0,8	0,8
3	1,8	1,1	3	1,2	0,9
4	1,9	1,14	4	1,5	0,9
5	2,03	1,14	5	1,8	1,0
6	2,00	1,13	6	1,94	1,02
7	1,9	1,1	7	1,95	1,02
8	1,6	1,0	8	1,92	1,00
9	1,3	0,8	9	1,7	1,0
			10	1,4	0,9
			11	0,9	0,8
			12	0,9	1,0

 $N = 25$

1	1,3	0,9	1	0,8	0,5
2	1,6	1,1	2	0,9	0,8
3	2,0	1,3	3	1,2	0,9
6	3,5	1,5	6	2,7	1,2
7	4,0	1,60	7	3,2	1,2
12	5,23	1,60	13	5,18	1,42
13	5,25	1,60	14	5,25	1,42
14	5,20	1,6	15	5,22	1,42
19	3,7	1,5	22	3,0	1,2
20	3,3	1,5	23	2,6	1,1
22	2,3	1,3	25	1,5	1,9
23	1,8	1,1	26	0,9	0,9
24	1,4	0,9	27	0,8	1,0

Таблица 2

Средние квадратические ошибки координат
пунктов пятикратного ряда
 $\mu = 1 \text{ см}$

Диагональ IP			Диагональ AB			Диагональ CD	
K	m_x	m_y	K	m_x	m_y	m_x	m_y

 $N = 10$

1	1,2	0,8	1	0,8	0,5	0,9	1,1
2	1,4	1,0	2	0,9	0,8	1,0	1,0
3	1,5	1,1	3	1,2	0,9	1,2	1,0
4	1,60	1,13	4	1,3	1,0	1,3	1,0
5	1,63	1,14	5	1,4	1,0	1,45	0,98
6	1,62	1,13	6	1,49	1,02	1,46	0,99
7	1,6	1,1	7	1,51	1,02	1,41	0,98
8	1,4	1,0	8	1,46	1,01	1,4	1,0
9	1,2	0,8	9	1,4	1,0	1,2	1,0
			10	1,2	0,9	1,0	1,0
			11	0,9	0,9	0,9	1,1
			12	1,0	1,1	1,2	1,5

 $N = 25$

1	1,3	0,9	1	0,8	0,5	0,9	1,1
2	1,5	1,1	2	0,9	0,8	1,0	1,0
3	1,7	1,2	3	1,3	0,9	1,2	1,0
6	2,4	1,4	6	1,9	1,0	2,0	1,1
7	2,6	1,4	7	2,0	1,1	2,3	1,2
12	3,23	1,43	13	3,18	1,31	3,18	1,27
13	3,24	1,43	14	3,20	1,31	3,19	1,27
14	3,2	1,4	15	3,2	1,3	3,16	1,26
19	2,5	1,4	22	2,1	1,2	1,9	1,1
20	2,3	1,4	23	1,8	1,2	1,6	1,0
22	1,8	1,2	25	1,2	1,1	1,1	1,0
23	1,6	1,1	26	0,9	1,1	0,9	1,1
24	1,3	0,9	27	1,1	1,2	1,2	1,5

После этого последний элемент последнего столбца матрицы равен обратному весу сформированной весовой функции, т. е. абсциссы K -го пункта диагонали I II. Далее происходит изменение номеров пункта K и формируются все весовые функции абсцисс, вычисляются их веса, а затем так же — веса ординат этих же пунктов.

Далее проводятся определения обратных весов абсцисс и ординат пунктов остальных диагоналей в данном макете сети. По полученным из ЭВМ весам вычислены средние квадратические ошибки. При этом принято, что средняя квадратическая ошибка

измерения сторон равна 1 см. Поэтому полученные результаты можно рассматривать как соотношения ошибок координат к ошибкам измерения сторон.

В табл. 1—3 приведены ошибки координат пунктов сетей из трех, пяти и семи рядов только для вариантов с $N=10$ и 25.

Проведенные исследования позволили сделать такие выводы:

1. Точность положения пунктов в несвободных сетях трилатерации значительно выше, чем в свободных. Так, в трехкратном

Таблица 3

Средние квадратические ошибки координат пунктов
семикратного ряда

$\mu=1$ см

Диагональ IP			Диагональ AB			Диагональ CD		Диагональ EF	
κ	m_x	m_y	κ	m_x	m_y	m_x	m_y	m_x	m_y
$N=10$									
1	1,3	0,8	1	0,8	0,5	1,0	1,1	1,4	1,3
2	1,4	1,0	2	0,9	0,8	1,0	1,0	1,5	1,1
3	1,5	1,1	3	1,2	0,9	1,2	1,0	1,1	1,1
4	1,51	1,15	4	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	1,0
5	1,52	1,17	5	1,3	1,0	1,29	1,01	1,2	1,0
6	1,51	1,16	6	1,37	1,05	1,31	1,01	1,28	1,00
7	1,5	1,1	7	1,37	1,05	1,30	1,01	1,28	1,00
8	1,4	1,0	8	1,34	1,04	1,3	1,0	1,25	1,00
9	1,3	0,8	9	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	1,0
			10	1,2	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1
			11	0,9	1,0	1,0	1,2	1,0	1,1
			12	1,0	1,2	1,3	1,5	1,1	1,3
$N=25$									
1	1,3	0,8	1	0,8	0,5	1,0	1,1	1,3	1,4
2	1,5	1,1	2	0,9	0,8	1,1	1,0	1,4	1,2
3	1,6	1,2	3	1,2	1,0	1,2	1,0	1,1	1,1
6	2,0	1,4	6	1,7	1,2	1,7	1,1	1,6	1,1
7	2,1	1,4	7	1,8	1,2	1,9	1,2	1,8	1,1
12	2,48	1,42	13	2,40	1,29	2,39	1,23	2,28	1,21
13	2,49	1,42	14	2,42	1,29	2,39	1,23	2,39	1,21
14	2,47	1,42	15	2,41	1,29	2,38	1,22	2,38	1,21
19	2,1	1,4	22	1,7	1,2	1,5	1,1	1,7	1,1
20	1,9	1,3	23	1,6	1,1	1,4	1,1	1,5	1,1
22	1,6	1,2	25	1,2	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1
23	1,5	1,1	26	0,9	1,0	1,0	1,2	1,0	1,2
24	1,3	0,9	27	1,0	1,2	1,3	1,6	1,1	1,4

несвободном ряду с $N=10$ (21—22 треугольника в ряду) предельная ошибка положения пункта только в 2,3 раза больше ошибки измерения сторон, а в свободном — в 17 раз. В пятикратном ряду с $N=10$ они больше соответственно в 2 и в 15 раз.

2. Соотношение сдвигов пунктов в несвободных сетях тоже значительно меньше, чем в свободных. Так, в трехкратном несвободном ряду соотношение поперечного и продольного сдвигов наиболее слабого пункта при $N=10$ равно 2,0 а при $N=25$ — 3,7. В такой же сети из семи рядов эти соотношения соответственно равны 1,5 и 2,0. В свободных сетях из трех, пяти и семи рядов при

$N=10$ поперечный сдвиг наиболее слабого пункта в 8 раз больше продольного, а при $N=25$ — в 16,5 раза.

3. Наиболее слабыми при любом числе рядов в сети являются пункты, расположенные на середине диагоналей. Ошибки координат пунктов медленно возрастают при движении от края к середине диагоналей.

4. При увеличении числа рядов в сети с 3 до 5 ошибки положения слабых пунктов уменьшились на 15% при $N=10$ и на 36% при $N=25$, с увеличением их с пяти до семи уменьшение ошибок положения пунктов составляет 4 и 18%. Поэтому можно предположить, что дальнейшее увеличение числа рядов в сети при $N < 15$ не приведет к существенным изменениям в значениях ошибок положения пунктов. При $N < 15$ ошибки положения пунктов в сетях с числом рядов больше семи будут на 8...10% меньше.

В заключение можно сказать, что в сплошных несвободных сетях трилатерации ошибки положения наиболее слабых пунктов только в два-три раза больше ошибок измерения сторон.

Исследованные сети трилатерации близки по своему построению к сетям 2 класса, заполняющим полигоны 1 класса. Поэтому полученные результаты можно использовать при проектировании сетей трилатерации 2 класса, а также в других случаях, когда создаются сети трилатерации, опирающиеся на пункты более высокого класса.

1. Бронштейн Г. С., Сафонов А. С. Аппроксимация формул для оценки точности ряда трилатерации // Геодезия и картография. 1974. № 1. С. 12—15.
2. Заводовский А. В. Оценка точности линейных триангуляций // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. геодез. 1959. № 5. С. 3—33.
3. Костецкая Я. М. К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1967. Вып. 6. С. 25—42.
4. Костецкая Я. М. О точности дирекционных углов в сплошных сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1974. Вып. 20. С. 45—50.
5. Костецкая Я. М. О точности дирекционных углов в несвободных сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 43. С. 41—47.
6. Проворов К. Л. Точность элементов сети линейной триангуляции // Тр. НИИГАиК. 1958. Т. 11. С. 56—64.