УДК 528.412

З. Р. САВЯК, И. И. КОВАЛИВ

ТОЧНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ ПО ТРЕМ ИСХОДНЫМ ПУНКТАМ И ТОЧКА ЛЕМУАНА

В связи с массовым применением светодальномеров и радиодальномеров в наземной геодезии и лазерных измерений для определения положений и орбит ИСЗ интерес к линейной засечке значительно возрос.

---

* *Полищук Ю. В.* Геодезическая эргономика. М., 1983.

Установлено, что при равенстве относительных погрешностей измерения линий характер изменения точности линейной засечки одинаков с прямой угловой [4, 7].

Построены номограммы для графической оценки точности положения пункта линейной засечки по двум [8] и трем [5] исходным пунктам. Авторы [3] разработали общую теорию пространственной линейной засечки, где плановая погрешность определяется через высоты исходного треугольника.

А. В. Буткевич показал, что положение пункта, определяемое по трем расстояниям, выгоднее при углах засечки 120°, если пункт находится внутри исходного треугольника и при углах 60 и 120 (240°), если пункт находится вне исходного треугольника [1]. М. С. Урмаев приводит новые алгоритмы вычисления геодезических координат пунктов из линейных пространственных засечек [6].

Настоящая работа посвящена точности линейной засечки по трем исходным пунктам и нахождения выгоднейшего положения искомого пункта в общем случае для любой формы исходного треугольника при определении планового положения пунктов.

Пусть измерены расстояния s_i от исходных пунктов $A_i(x_i, y_i, z_i)$, где $i=1, 2, 3$ до определяемого пункта p (x_p, y_p, z_p). Тогда справедлива зависимость

$$s_i = (x_i - x_p)^2 + (y_i - y_p)^2 + (z_i - z_p)^2. \quad (1)$$

Система (1) имеет единственное решение при выполнении двух условий:

1) исходные пункты не совпадают;
2) исходные пункты не лежат на одной прямой.

Пусть $z=\mathrm{const}$, тогда, решая систему (1) относительно x_p и y_p, получаем

$$x_p = \frac{1}{2}\,\frac{(y_2 - y_3)(x_1^2 + y_1^2 - s_1^2) + (y_3 - y_1)(x_2^2 + y_2^2 - s_2^2) + (y_1 - y_2)(x_3^2 + y_3^2 - s_3^2)}{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)},$$

$$y_p = \frac{1}{2}\,\frac{(x_3 - x_2)(x_1^2 + y_1^2 - s_1^2) + (x_1 - x_3)\times(x_2^2 + y_2^2 - s_2^2) + (x_2 - x_1)(x_3^2 + y_3^2 - s_3^2)}{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}. \quad (2)$$

При засечке по трем пунктам в (2) знаменатель не равен нулю и по модулю численно равен учетверенной площади исходного треугольника.

Для случая $m_s=\mathrm{const}$ без учета погрешностей исходных данных в (2) координаты определяемого пункта — функции от измеренных линий, т. е.

$$x_p = f(s_1, s_2, s_3), \quad y_p = \varphi(s_1, s_2, s_3). \quad (3)$$

Среднюю квадратическую погрешность $m_p^2=m_x^2+m_y^2$ определяемого пункта получим по известной формуле из теории погрешностей:

$$m_p^2=\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right)^2 m_s^2+\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right)^2 m_s^2+\left(\frac{\partial f}{\partial s_3}\right)^2 m_s^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right)^2 m_s^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 m_s^2+$$

$$+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_3}\right)^2 m_s^2=m_s^2\,\frac{s_1^2\,a_1^2+s_2^2\,a_2^2+s_3^2\,a_3^2}{4F^2}, \tag{4}$$

где a_i — стороны исходного треугольника, лежащие против вершин A_i; F — площадь исходного треугольника.

Перепишем (4) в таком виде:

$$m_p^2=K^2 m_s^2, \tag{5}$$

где

$$K^2=\frac{s_1^2\,a_1^2+s_2^2\,a_2^2+s_3^2\,a_3^2}{4F^2}. \tag{6}$$

Поскольку $m_s=\text{const}$, для практического исследования распределения m_p необходимо и достаточно исследовать распределение коэффициента K.

Подставляя в (6) зависимость (1), получаем

$$K^2=\frac{A}{4F^2}\left[(x_p-x_L)^2+(y_p-y_L)^2+(z_p-z_L)^2+M\right], \tag{7}$$

где

$$x_L=\frac{a_1^2\,x_1+a_2^2\,x_2+a_3^2\,x_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\quad y_L=\frac{a_1^2\,y_1+a_2^2\,y_2+a_3^2\,y_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

$$z_L=z_i=0; \tag{8}$$

$$M=\frac{EA-B^2-C^2-D^2}{A^2}; \tag{9}$$

$$A=a_1^2+a_2^2+a_3^2,\quad B=a_1^2\,x_1+a_2^2\,x_2+a_3^2\,x_3,$$

$$C=a_1^2\,y_1+a_2^2\,y_2+a_3^2\,y_3,\quad D=0,$$

$$E=a_1^2\,(x_1^2+y_1^2)+a_2^2\,(x_2^2+y_2^2)+a_3^2\,(x_3^2+y_3^2). \tag{10}$$

Исследование (7) показывает, что K, а следовательно и m_p принимают минимальные значения при $x_p=x_L$; $y_p=y_L$; $z_p=z_L$. Подставляя (8), (9) в (7) с учетом (10), выражаем $K_{\min}$ через стороны исходного треугольника:

$$K_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a_1\,a_2\,a_3}{F\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \tag{11}$$

Исследование (11) показывает, что $K_{\min}$ зависит только от формы треугольника, а не от его величины, т. е. для подобных треугольников $K_{\min}=\text{const}$; при $\lim\limits_{a_i \to 0} F=0$ имеем неопределенность K, поскольку в точку может превратиться треугольник любой формы, если $a_i \to 0$; из всех возможных форм исходного треугольника равностороннему треугольнику соответствует наименьший $K_{\min}=1{,}15$. Методами элементарной математики нетрудно показать, что точка $L(x_L, y_L, z_L)$ является точкой Лемуана [2] * исходного треугольника.

Поверхности уровней K из (7) представляют собой концентрические сферы с центром в точке Лемуана $L(x_L, y_L, z_L)$, причем большему m_p соответствует сфера большего радиуса. Точка Лемуана соответствует точке минимума по [3], а также для равностороннего треугольника по [1].

Физический смысл точки Лемуана заключается в том, что точка Лемуана — центр тяжести плоской однородной сложной фигуры, образованной из трех квадратов, построенных на сторонах исходного треугольника, центры тяжести которых совмещены с соответствующими противолежащими вершинами. Из физического смысла можно легко оценить местоположение точки Лемуана любого исходного треугольника.

Если минимальная погрешность не превышает допустимую $m_p \leqslant m_{p\,\text{доп}}$, то, подставляя (7) в (5), находим допустимую область измерений, представляющую собой шар радиусом

$$R_{\text{доп}} = \frac{\sqrt{4\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\,F^2\,\dfrac{m_{p\,\text{доп}}}{m_s} - 3a_1^2\,a_2^2\,a_3^2}}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{12}$$

с центром в точке Лемуана исходного треугольника.

Поверхности уровней x или y или z представляют собой семейство двухполосных гиперболоидов вращения относительно осей, проходящих через точку Лемуана исходного треугольника и параллельных оси OK с общими асимптотами линий вращения соответственно и минимальными удалениями от точек Лемуана на величину $K_{\min}$, определяемую по формуле (11).

Сечения поверхностей уровней x, y или z плоскостями $K=\text{const}$ образуют семейства окружностей, проекции которых на плоскости, параллельные или перпендикулярные плоскости исходного треугольника, представляют собой концентрические окружности с центрами, проектирующимися в точку Лемуана.

Таким образом, из определения плановых координат линейной засечкой по трем исходным пунктам, если $m_s=\text{const}$, следует:

* Точка Лемуана есть точка пересечения симедиан треугольника. Симедиана треугольника — прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы внутреннего угла при вершине треугольника, делящая противоположную сторону внутренним образом на части, пропорциональные квадратам прилегающих сторон [2].

1. Для всех определяемых пунктов в пространстве минимальной погрешности соответствует точка Лемуана внутри исходного треугольника.

2. Большему расстоянию определяемого пункта от точки Лемуана соответствует большая погрешность.

3. Минимальная погрешность зависит только от формы исходного треугольника и не зависит от его величины.

4. Наименьшее значение $K_{min}=1,15$ достигает погрешность в равностороннем треугольнике.

5. Всем пунктам, лежащим на сферах с центром в точке Лемуана, соответствуют одинаковые погрешности.

6. Допустимая область измерений ограничена сферой радиусом $R_{доп}$ из (12) с центром в точке Лемуана.

1. *Буткевич А. В.* Об уравнивании линейных засечек // Геодезия и картография. 1959. № 1. С. 21—31. 2. *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. М., 1962. 3. *Йордан В., Эггерт О., Кнейсель М.* Руководство по геодезии. М., 1971. Т. 6. 4. *Лютц А. Ф.* Разбивка крупных сооружений. Основные положения. М., 1952. 5. *Маркуш Б.* О точности линейной засечки // Геодезия и картография. 1980. № 2. С. 54—56. 6. *Урмаев М. С.* Прямые методы вычисления геодезических координат по результатам пространственных линейных засечек // Изв. вузов. Геодезия и картография. 1985. № 5. С. 3—11. 7. *Хмелевский Ю. С.* Графическая оценка точности угловых и линейных засечек // Геодезия и картография. 1979. № 12. С. 23—24. 8. *Хмелевский Ю. С.* Графическая оценка точности линейной засечки по двум пунктам // Геодезия и картография. 1980. № 2. С. 54—56.

Статья поступила в редколлегию 17. 04. 86