

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ НА ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЕТИ

По координатам геодезических пунктов можно определить различные элементы сети. Оценку точности этих элементов нужно производить с учетом корреляционной зависимости погрешностей определения координат [1]. В статье, на основании геометрической интерпретации элементов ковариационной матрицы координат пункта в виде окружности стандартов, предлагаем простой способ оценки точности определения длин сторон и дирекционных углов сети. Показан характер и степень влияния математической корреляции на погрешность таких определений.

Пусть окружность стандартов (рис. 1, а) характеризует погрешность положения определяемого пункта сети относительно исходных. Теоретические основы и способы построения такой окружности, ее ориентирование относительно координатных осей и методика получения по ней необходимой информации подробно изложены в [3, 4]. Для некоторой стороны сети (α, s) стандарт расстояния σ_s равен 0—3, а стандарт дирекционного угла $\sigma_\alpha = \frac{(0-4) \cdot 206265''}{s}$. Указанные оценки сразу учитывают коэффи-

В свою очередь из рис. 1, а следует:

$$\begin{aligned}\sigma_s^2 &= e^2 + R^2 + 2eR \cos(2\varphi_0 - 2\alpha) = \\ &= \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} + \frac{\sqrt{l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2} \cos(2\varphi_0 - 2\alpha), \\ \sigma_\alpha^2 &= \frac{(\rho'')^2}{s^2} [e^2 + R^2 - 2eR \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)] = \\ &= \frac{(\rho'')^2}{s^2} \left[\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} - \frac{\sqrt{l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2} \cos(2\varphi_0 - 2\alpha) \right],\end{aligned}$$

т.е. получаем те же выражения, что и по формулам (1).

Если в (1) исключить член, содержащий r_{xy} , то получим выражение для дисперсий s и α без учета корреляции:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_s^2 &= \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} + \frac{\sqrt{l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2} \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha, \\ \bar{\sigma}_\alpha^2 &= \frac{(\rho'')^2}{s^2} \left[\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} - \frac{\sqrt{l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2} \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha \right].\end{aligned}\quad (4)$$

При $l_1 = l_2 = l$ формулы (3) и (4) значительно упрощаются. Так, стандарты s и α с учетом корреляции следующие:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= l \sqrt{1 + \cos \gamma_3 \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)}, \\ \sigma_\alpha &= \frac{l\rho''}{s} \sqrt{1 - \cos \gamma_3 \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)},\end{aligned}\quad (5)$$

а без учета корреляции —

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_s &= l \sqrt{1 + \cos \gamma_3 \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha}, \\ \bar{\sigma}_\alpha &= \frac{l\rho''}{s} \sqrt{1 - \cos \gamma_3 \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha}.\end{aligned}\quad (6)$$

Для того чтобы иметь возможность пользоваться формулами (5) и (6), необходимо произвести эквивалентную замену данной окружности (рис. 1, а) с l_1, l_2 и γ другой окружностью стандартов (рис. 1, б) с l и γ_3 . При этом должны сохраниться все элементы (e, R, A_0, B_0) и ориентировка окружности относительно координатных осей. Такая замена представляет интерес и с методической точки зрения. Например, при замене многократных геодезических засечек на эквивалентные им простые [2] в качестве простой получают засечку с одинаковыми длинами сторон. Если такую засечку характеризовать окружностью стандартов, то будет иметь место равенство $l_1 = l_2 = l$.

Равенство $l_1 = l_2 = l$ возникает в случае, когда диаметр 1—2 окружности перпендикулярен диаметру, проходящему через точки 0 и 0₁ (рис. 1, б). Тогда, выразив искомые величины следующим образом

$$l^2 = e^2 + R^2, \quad (2R)^2 = 2l^2(1 - \sin \gamma_3)$$

и подставив в эти выражения формулы из работы [3], имеем

$$l^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} = \frac{A_0^2 + B_0^2}{2},$$

$$\sin \gamma_3 = \frac{2l_1 l_2}{l_1^2 + l_2^2} \sin \gamma = \frac{2A_0 B_0}{A_0^2 + B_0^2}, \quad (7)$$

$$2\alpha_{13} = 2\varphi_0 - \gamma_3, \quad 2\alpha_{23} = 2\varphi_0 + \gamma_3,$$

причем эти величины можно получить путем элементарных геометрических построений.

В работе [1] отмечается, что влияние коэффициента корреляции при оценке точности определения расстояния и дирекционных

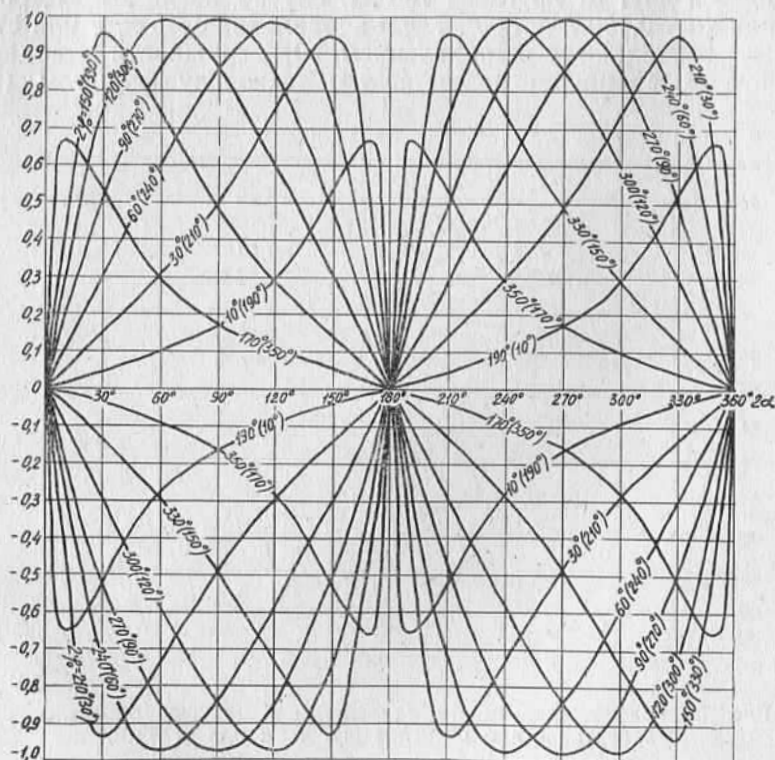


Рис. 2. График зависимости относительной ошибки определения дисперсий s и a от углов $2\varphi_0$ и 2α при $\gamma_3 = 10^\circ$.

углов сети может быть существенным. Для анализа характера и степени этого влияния исследовались математические модели эквивалентных засечек с $\gamma_3 = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70$ и 80° , в качестве $2\varphi_0$ и 2α были взяты значения $10, 30, 60, 90, 120, 150, 170, 190, 210, 240, 270, 300, 330$ и 350° . Для них по формулам (5) и (6) подсчитаны стандарты расстояний и дирекционных углов с учетом и без

учета корреляции. Затем вычислены относительные ошибки определения дисперсий и стандартов

$$\frac{\sigma_s^2 - \bar{\sigma}_s^2}{\bar{\sigma}_s^2} \text{ и } \frac{\sigma_\alpha^2 - \bar{\sigma}_\alpha^2}{\bar{\sigma}_\alpha^2}, \quad \frac{\sigma_s - \bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_s} \text{ и } \frac{\sigma_\alpha - \bar{\sigma}_\alpha}{\bar{\sigma}_\alpha}. \quad (8)$$

По полученным данным построены графики зависимости относительных ошибок определения дисперсий и стандартов от углов $2\varphi_0$ и 2α . Для большей наглядности на рис. 2,3 приведены графики для $\gamma_0 = 10^\circ$. На этих графиках значения $2\varphi_0$ без скобок соответствуют относительным ошибкам дисперсий и стандартов s , а в скобках — относительным ошибкам дисперсий и стандартов α и отличаются друг от друга на 180° . В случае, когда $2\varphi_0 = 0,180$ или 360° или $2\alpha = 0,180$ или 360° , т. е. направление осей x, y или стороны сети совпадают с направлением 00_1 окружности стандартов, относительные ошибки равны нулю, поскольку формулы (5) и

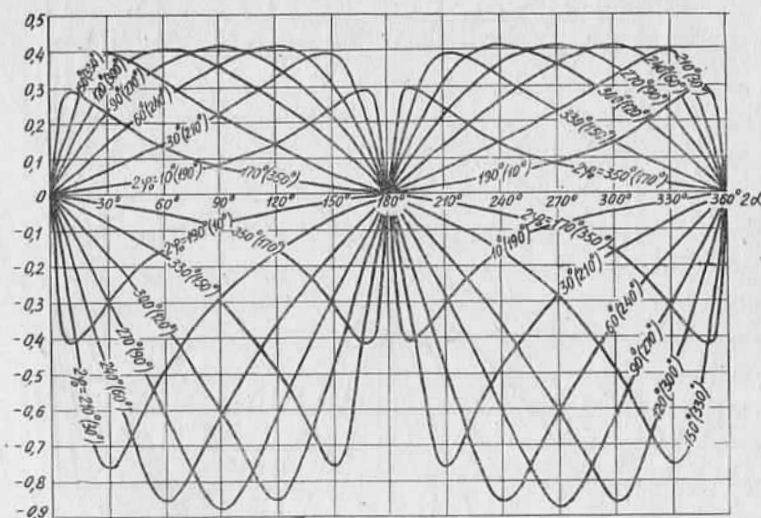


Рис. 3. График зависимости относительной ошибки определения стандартов s и α от углов $2\varphi_0$ и 2α при $\gamma_0 = 10^\circ$.

(6) дают одинаковые результаты. В других случаях относительные ошибки изменяются от нуля до некоторого экстремального значения — положительного или отрицательного. Положительные ошибки говорят о том, что неучет корреляции дает заниженные результаты дисперсий и стандартов, отрицательные ошибки свидетельствуют о завышенных результатах.

На обоих графиках (рис. 2,3) четко прослеживается одинаковая зависимость экстремальных значений относительных ошибок дисперсий и стандартов от соотношения углов $2\varphi_0$ и 2α . Положи-

тельные экстремальные значения ошибок определения дисперсий и стандартов расстояний соответствуют $2\varphi_0 + 2\alpha = \pi$ или 3π , отрицательные появляются в случае $2\varphi_0 - 2\alpha = \pi$ или $-\pi$. Положительные экстремальные значения ошибок определения дисперсий и стандартов дирекционных углов соответствуют $2\varphi_0 + 2\alpha = 2\pi$, отрицательные возникают в случае $2\varphi_0 - 2\alpha = 0$. Экстремальные значения функции (8) имеют место при $2\alpha = 90^\circ$ или 270° . Такие же выводы получены путем исследования выражений (8) на экстремум. Выражения (8) являются функциями двух переменных, которые в пространстве изображаются поверхностями. Графики (рис. 2,3) являются сечениями поверхностей плоскостями, соответствующими $2\varphi_0 = \text{const}$. Если от функций (8) взять частые производные по переменным $2\varphi_0 - 2\alpha$ и $2\varphi_0 + 2\alpha$, то критические точки имеют значения $2\varphi_0 - 2\alpha = 180^\circ$ к и $2\varphi_0 + 2\alpha = 180^\circ$ n. Исследования по значениям вторых производных в этих точках или при помощи разложения функций в степенной ряд в окрестности этих точек (ограничиваясь первыми двумя слагаемыми) показали, что если n и k четные (нечетные), то функции экстремума не имеют, если n — четное (нечетное) и k — нечетное (четное), то функции имеют экстремумы (рис. 2,3).

Для указанных выше углов γ_3 подсчитаны экстремальные значения относительных ошибок определения дисперсий и стандартов s и a для соответствующих соотношений углов $2\varphi_0$ и 2α . Полученные данные иллюстрируются графиками на рис. 4, где пунктирные линии характеризуют относительные ошибки дисперсий, а сплошные линии — стандартов. Эти графики позволяют получить полное представление об экстремальных значениях относительных ошибок дисперсий и стандартов расстояний и дирекционных углов.

Радиальную ошибку M с учетом корреляции можно найти по формуле

$$M = l \sqrt{2(1 + \cos \gamma_3 \cdot 2\varphi_0)}, \quad (9)$$

в которой всегда γ_3 — острый угол эквивалентной засечки, а $2\varphi_0 \leq 180^\circ$.

И, наконец, сжатие эллипса ошибок, которое может служить одним из критериев оптимизации, определяем из выражения

$$\varepsilon = \frac{\cos \frac{\gamma_3}{2} - \sin \frac{\gamma_3}{2}}{\cos \frac{\gamma_3}{2}} = \sqrt{\frac{2(1 - \sin \gamma_3)}{1 + \cos \gamma_3}}. \quad (10)$$

Простота приведенной методики оценки точности элементов сети с учетом корреляции делает ее доступной для массового применения в геодезическом производстве непосредственно на рабочем месте, открывает новые возможности механизации и автоматизации уравнивания с последующим получением любой информации о погрешности положения пункта и элементов сети.

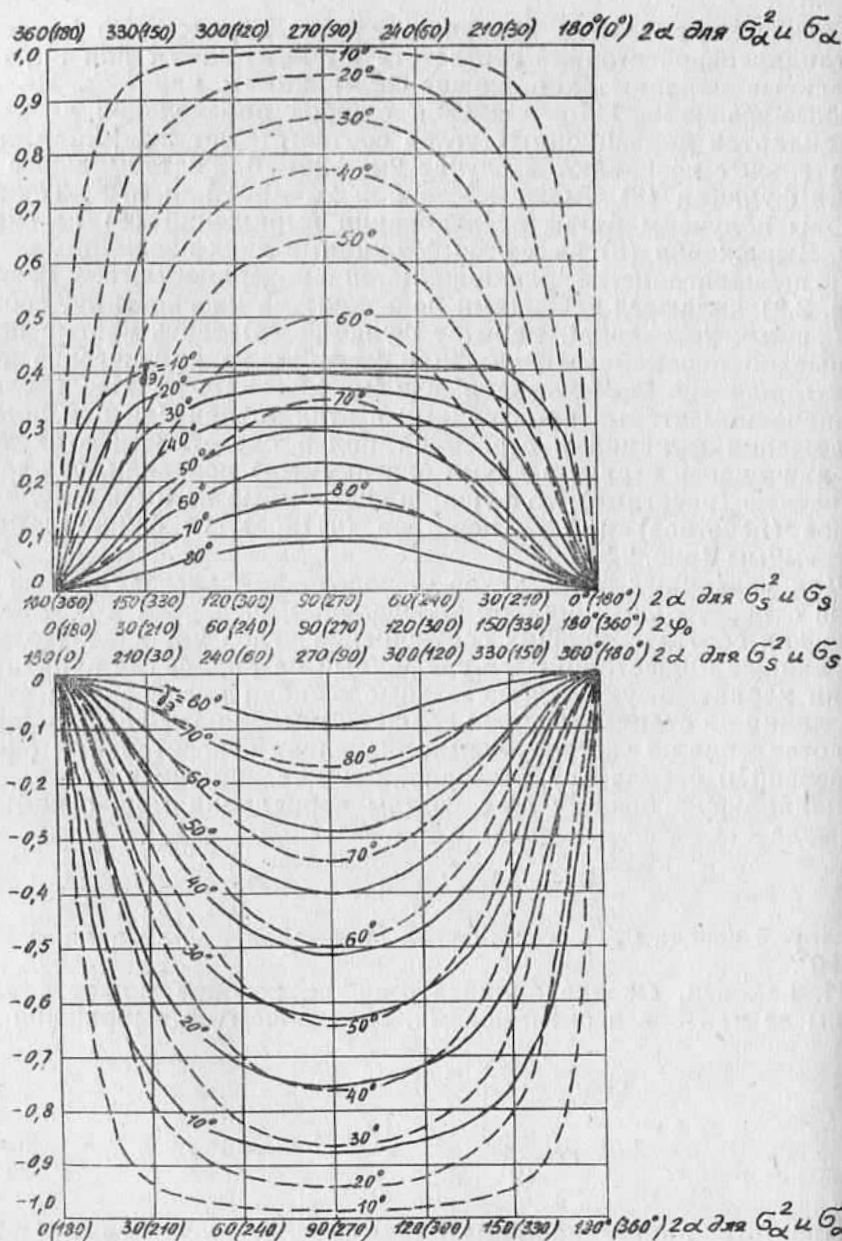


Рис. 4. Экстремальные относительные ошибки определения дисперсий и стандартов s и α .

1. *Видуев Н. Г.* Коэффициент корреляции в системе плоских прямоугольных координат // Инженерная геодезия. 1979. Вып. 22. С. 12—16.
2. *Шеховцов Г. А.* Метод замены многократных геодезических засечек на эквивалентные им простые // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 37. С. 108—116.
3. *Шеховцов Г. А.* Новый способ определения элементов эллипса погрешностей и его подеры // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 42. С. 103—108.
4. *Шеховцов Г. А.* Оценка точности засечек с помощью окружности стандартов // Геодезия и картография. 1985. № 8. С. 45—47.

Статья поступила в редколлегию 10.02.86