УДК 528.482

*В. Я. РАИНКИН, А. М. ШАРЫГИН*

# О ВЛИЯНИИ УГЛА КРУЧЕНИЯ БАШЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ НА ВЫНОС ЦЕНТРА НА МОНТАЖНЫЙ ГОРИЗОНТ

При проектировании центра башенного сооружения на монтажный горизонт в его положение надо ввести поправку за смещение оси сооружения от вертикали под влиянием внешних условий. В работе * предложена методика и получены формулы для вычисления поправок с учетом того, что изгиб оси башенных сооружений под влиянием внешних факторов происходит по плоской кривой. В действительности же линия изгиба имеет форму пространственной кривой.

В статье рассматривается вопрос о значении угла кручения и его влиянии на вынос центра для башни переменного сечения и с учетом сил массы.

Считая толщину стенки башни постоянной и равной $\delta$, для наружного диаметра принимаем гиперболическую зависимость (см. рисунок) $D(z)=b/z$. Граничные условия при: $z=L_0$ $D(L_0)=$ $=b/L_0=D$, $z=L$ $D(L)=b/L=d$. Отсюда получаем $b=L_0\cdot D$ и $b=L\cdot d$. Тогда $L=L\cdot d/D=(H+L_0)\cdot d/D$. После преобразования имеем

$$L_0=H\cdot d/(D-d), \quad b=H\cdot d\cdot D/(D-d).$$

Обозначим

$$\Upsilon=d/(D-d)=1/(D/d-1).$$

Тогда

$$L_0=H\cdot\gamma,\ L=(1+\gamma)\cdot H,\ b=HD\gamma,\ D(z)=HD\gamma/z, \qquad (1)$$

где $H$ — высота телебашни.

За счет одностороннего нагрева ось телебашни изогнется. Дифференциальное уравнение оси изогнутой телебашни запишем в виде

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}=\frac{\alpha\,\Delta t}{D(z)}=\frac{\alpha\,\Delta t}{HD\gamma}z\,, \qquad (2)$$

где $\alpha$ — коэффициент температурного расширения материала телебашни; $\Delta t$ — разность температур диаметрально противоположных точек с солнечной и теневой сторон.

---

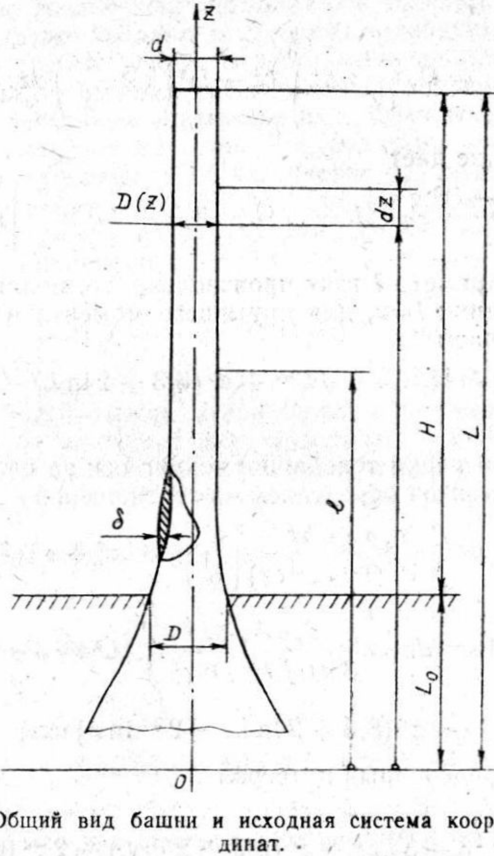
* Раинкин В. Я. Учет влияния тепловых деформаций башенных сооружений при определении вертикальных их осей // Геодезия и аэрофотосъемка, 1975. № 4. С. 37—41.

После двойного интегрирования соотношения (2) и определения постоянных получим

$$V(z) = \frac{\alpha\,\Delta t}{6\,HD\gamma}\,(z^3 - 3\,L_0^2\,z + 2\,L_0^3). \qquad (3)$$

При действии ветра на изогнутую башню в ее поперечных сечениях возникает крутящий момент. Для крутящего момента в произвольном сечении $(z=l)$ можно записать

$$M_k = \int\limits_l^L c_x \frac{\rho v^2}{2} D(z)\,[V(z) - V(l) - (z-l)\cdot V''(l)]\,dz,$$




Общий вид башни и исходная система координат.

где $c_x$ — аэродинамический коэффициент сопротивления ветровому потоку; $\rho$ — плотность воздуха; $v$ — скорость ветра.

Поскольку

$$V(l)=\frac{\alpha\,\Delta t}{6\,HD\gamma}(l^3-3L_0^2\,l+2L_0^3),\quad V'(l)=\frac{\alpha\,\Delta t}{6\,HD\gamma}(3\,l^2-3\,L_0^2),$$

то выражение в скобках примет вид

$$V(z)-V(l)-(z-l)\cdot V'(l)=\frac{\alpha\,\Delta t}{6\,HD\,\gamma}(z-l)^2(z+2l).$$

После подстановки в подынтегральное выражение получим

$$M_k=\int\limits_l^L c_x\frac{\rho v^2}{2}\,\frac{HD\gamma}{z}\,\frac{\alpha\,\Delta t}{6\,HD\gamma}(z-l)^2(z+2l)\,dz=$$

$$=C_x\frac{\rho v^2}{12}\alpha\,\Delta t\int\limits_l^L(z-l)^2\left(1+\frac{2l}{z}\right)dz.$$

Интегрирование дает

$$M_k=\left[\frac{(L-l)^3}{l}+l\,(L-l)\,(L-3\,l)+2\,l^3\ln\frac{L}{l}\right]x\,\frac{c_x\rho v^2}{12}\alpha\,\Delta t.$$

Поскольку параметр $l$ взят произвольно, то, полагая в полученном соотношении $l=z$, для крутящего момента в произвольном сечении получаем

$$M_k=c_x\,\rho v^2\alpha\,\Delta t\,[L^3/3-3\,Lz^2+z^3\,(8/3+2\ln L)-2\,z^3\ln z]\,/\,12. \tag{4}$$

Угол поворота верха телебашни вокруг оси за счет воздействия крутящих моментов определяем из соотношения

$$\varphi=\int\frac{M_k\,dz}{G\,I_p}=\int\frac{c_x\rho v^2\alpha\,\Delta t\,4}{12\,G\,\pi\delta\,D^3(z)}\left[\frac{L^3}{3}-3\,Lz^2+z^3\,(8/3+2\ln L)-\right.$$

$$\left.-2\,z^3\ln z\right]dz=\frac{c_x\rho v^2\alpha\,\Delta t}{3\,\pi G\delta\,H^3D^3\gamma^3}\int\limits_{L_0}^{L}[L^3z^3/3-3\,Lz^5+$$

$$+z^6\,(8/3+2\ln L)-2z^6\ln z]\,dz.$$

Вычислим определенный интеграл

$$\int\limits_{L_0}^{L}[L^3z^3/3-3\,Lz^5+z^6\,(8/3+2\ln L)-2\,z^6\ln z]\,dz=$$

$$=L^7\,[0{,}0051+\beta^7\,(0{,}28571\ln\beta-0{,}42176)+0{,}500\,\beta^6-0{,}08333\,\beta^4],$$

где

$$\beta = L_0 / L = H\gamma / H(1+\gamma) = \frac{\dfrac{d}{D-d}}{1+\dfrac{d}{D-d}} = d/D.$$

Тогда для угла поворота верхнего сечения башни получим

$$\varphi = \frac{c_x \rho v^2 \alpha \Delta t}{3\pi G\delta} x \frac{H^4(1+\gamma)^7}{D^3\gamma^3}[0{,}0051 + \beta^7(0{,}28571 \ln\beta -$$
$$-0{,}42176) + 0{,}500\beta^6 - 0{,}08333\beta^4]. \qquad (5)$$

Температурное воздействие изгибает ось телебашни, силы массы при этом также создают в сечениях телебашни изгибающие моменты, что требует учета. Вследствие незначительного влияния сил массы на изгибающие моменты по сравнению с температурным воздействием учитываем их приближенно, ибо точный учет делает задачу нелинейной. Предполагаем, что вначале под температурным воздействием изгибается ось телебашни, а уже затем подключаются силы массы. Для изгибающего момента в произвольном сечении на расстоянии $l$ от начала координат от сил массы можно записать

$$M(l) = \int_l^L q[V(z) - V(l)]\,dz, \qquad (6)$$

где $q = \gamma_м \pi D(z)\delta$ — масса метра телебашни с сечением диаметра $D(z)$; $\gamma_м$ — удельный вес материала телебашни; $V(z) = \alpha\Delta t[z^3 - 3L_0^2 z + 2L_0^3]/6HD\gamma$ — отклонение от оси сечения $z$; $V(l) = \alpha\Delta t[l^3 - 3L_0^2 l + 2L_0^3]/6HD\gamma$ — отклонение от оси сечения с координатой $l$.

После подстановки в подынтегральное выражение (6) получим

$$M(l) = \gamma_м \pi\delta\alpha\Delta t \int_l^L \frac{1}{6z}[z^3 - 3L_0^2 z - l^3 + 3L_0^2 l]\,dz =$$
$$= \gamma_м \pi\delta\alpha\Delta t\,[L^3/3 - l^3/3 + 3L_0^2 l - 3L_0^2 L +$$
$$+ (3L_0^2 l - l^3)(\ln L - \ln l)]/6.$$

Поскольку параметр $l$ выбран произвольно, для изгибающего момента от сил массы в сечении с координатой $z$ можно записать:

$$M(z) = \gamma_м \pi\delta\alpha\Delta t\,[z^3 \ln z - z^3(0{,}333 + \ln L) + z(3L_0^2 + 3L_0^2 \ln L) -$$
$$- 3L_0^2 z \ln z + L^3/3 - 3L_0^2 L]/6.$$

Выражение для изгибающего момента получилось сложным, однако это слабо убывающая функция от некоторого значения в сечении $L_0$ до нуля в сечении $z=L$ и, поскольку влияние сил массы учитывается приближенно, для сокращения выкладок аппроксимируем это выражение более простым, что не приведет к заметной погрешности, если функцию подобрать так, чтобы на границах интервала значения функций были одинаковы.

Принимаем $M(z)=k(z-L)/z^3$. При $z=L$ $M(L)=0$, что соответствует одному из условий. Из другого условия следует:

$$M(L_0)=k(L_0-L)/L_0^3=M(L_0)=\gamma_м \pi\delta\alpha\,\Delta t\,[L_0^3 \ln L - L_0^3(0{,}333+\ln L)+L_0(3L_0^2+3L_0^2\ln L)-3L_0^3\ln L_0+ L^3/3-3L_0^2 L]/6.$$

Отсюда для коэффициента $k$ получим

$$k=\gamma_м \pi\delta\alpha\,\Delta t\, L_0^6\,[8+6\ln(L/L_0)+(L/L_0)^3-9L/L_0]/18(L_0-L),$$

или

$$k=\gamma_м \pi\delta\alpha\,\Delta t\, H^5\gamma^5\,[9+6\beta\ln\beta-8\beta-1/\beta^2]/18(1-\beta).$$

Тогда дифференциальное уравнение оси изогнутой телебашни силами массы примет вид

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}=\frac{k(z-L)}{z^3 EI_x}, \tag{7}$$

или

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}=\frac{8k(z-L)}{E\pi\delta D^3(z)z^3}=\frac{8k(z-L)z^3}{\pi E\delta H^3D^3\gamma^3z^3}=A(z-L),$$

где

$$A=8k/\pi E\delta H^3D^3\gamma^3.$$

После двойного интегрирования (7) и определения постоянных уравнение оси изогнутой башни примет вид

$$V(z)=A(z-L)^3/6-A(L_0-L)^2(z-L)/2+A(L_0-L)^3/3. \tag{8}$$

При действии ветрового потока на изогнутую башню в сечении $z=l$ возникает крутящий момент

$$M_k(l)=\int_l^L 0{,}5c_x\rho v^2 D(z)\,[V(z)-V(l)-V'(l)(z-l)]\,dz.$$

Подставим (8) в слагаемые подынтегрального выражения

$$V(l)=A[(l-L)^3-3(L_0-L)^2(l-L)+2(L_0-L)^3]/6,$$

$$V'(l) = A\,[3\,(l-L)^2 - 3\,(L_0-L)^2]\,/\,6.$$

Тогда для крутящего момента получим

$$M_k = c_x \rho v^2 HD \gamma A \int\limits_l^L \frac{1}{12z}\,[(z-L)^3 - (l-L)^3 - 3\,(z-l)(l-L)^2]\,dz. \tag{9}$$

Вычисление интеграла дает

$$\int\limits_l^L [z^2 - 3\,Lz + 3\,L^2 - L^3\,/\,z - (l-L)^3/\,z - 3\,(l-L)^2 +$$
$$+ 3\,l\,(l-L)^2/\,z]\,dz = 6\,L^2\,l - 7{,}5\,Ll^2 - 7\,L^3\,/\,6 + 8\,l^3\,/\,3 +$$
$$+ (3\,l^2\,L - 2\,l^3)\,(\ln l - \ln L). \tag{10}$$

Следовательно, крутящий момент от сил массы и ветрового потока в произвольном сечении запишется в виде

$$M_k(z) = c_x \rho v^2 HD \gamma A\,[6\,L^2\,z - 7{,}5\,Lz^2 - 7\,L^3\,/\,6 + 8\,z^3\,/\,3 +$$
$$+ (3\,Lz^2 - 2\,z^3)\,(\ln z - \ln L)]\,/\,12.$$

Тогда значение угла поворота верхнего сечения телебашни от сил массы и ветрового потока определим следующим образом:

$$\varphi = \int\limits_{L_0}^{L} \frac{M_k(z)\,dz}{G\,I_p} = \frac{c_x \rho v^2 HD \gamma A \cdot 4}{12 \pi G \delta H^3 D^3 \gamma^3} \int\limits_{L_0}^{L} z^3 M_k(z)\,dz =$$

$$= \frac{c_x \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A}{3 \pi G \delta H^2 D^2 \gamma^2} \int\limits_{L_0}^{L} (6\,L^2 z^4 - 7{,}5\,Lz^5 - 7\,L^3 z^3\,/\,6 + 8\,z^6\,/\,3 +$$
$$+ \ln z \cdot 3\,L \cdot z^5 - 2\,z^6 \ln z - 3\,L \ln Lz^5 + 2 \ln Lz^6)\,dz =$$

$$= \frac{4\,c_x \rho v^2 \gamma_{\text{м}} \alpha \Delta t\,(9 + 6\,\beta \ln \beta - 8\,\beta - 1\,/\,\beta^2)}{27 \pi GE \delta D^5\,(1-\beta)} \int\limits_{L_0}^{L} (6\,L^2 z^4 - 7{,}5\,Lz^5 -$$
$$- 7L^3\,/\,6 + 8\,z^6\,/\,3 + 2 \ln Lz^6 - 3L \ln Lz^5 + 3Lz^5 \ln z - 2z^6 \ln z)\,dz.$$

Вычислим значение определенного интеграла:

$$\int\limits_{L_0}^{L} (6L^2 z^4 - 7{,}5\,Lz^5 - 7\,L^3 z^3\,/\,6 + 8\,z^6\,/\,3 + 2 \ln Lz^6 - 3L \ln Lz^5 +$$
$$+ 3\,Lz^5 \ln z - 2\,z^6 \ln z)\,dz = L^7\,[-0{,}0032312 - 1{,}2\,\beta^5 + 0{,}2917\,\beta^4 +$$

$$+ \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) - \beta^6 (0{,}5 \ln \beta - 1{,}333)].$$

Для угла поворота верхнего сечения получим

$$\varphi = \frac{4 c_x \rho v^2 \gamma_м \alpha \Delta t L^7}{27 \pi G E \delta (1-\beta) D^5} [9 + 6 \beta \ln \beta - 8 \beta - 1/\beta^2] \cdot [0{,}2917 \beta^4 -$$

$$-1{,}2 \beta^5 - \beta^6 (0{,}5 \ln \beta - 1{,}333) + \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) - 0{,}0032312].$$

Таким образом, для угла поворота верхнего сечения телебашни при одностороннем температурном нагреве под воздействием ветра и с учетом гравитационных сил массы запишем

$$\varphi = \frac{c_x \rho v^2 \alpha \Delta t}{3\pi G \delta} \frac{H^7 (1+\gamma)^7}{H^3 D^3 \gamma^3} [0{,}0051 + \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) +$$

$$+ 0{,}5 \beta^6 - 0{,}0833 \beta^4] + \frac{4 c_x \rho v^2 \alpha \Delta t \gamma_м}{27 \pi G E \delta (1-\beta)} \frac{H^7 (1+\gamma)^7}{D^5} [9 + 6 \beta \ln \beta -$$

$$8 \beta - 1/\beta^2] [0{,}2917 \beta^4 - 1{,}2 \beta^5 - \beta^6 (0{,}5 \ln \beta - 1{,}333) + \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta -$$

$$- 0{,}4217) - 0{,}0032312] = \frac{c_x \rho v^2 \alpha \Delta t}{3\pi G \delta} \frac{H^4 (1+\gamma)^7}{D^3 \gamma^3} \Big\{ [0{,}0051 +$$

$$\beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) + 0{,}5 \beta^6 - 0{,}0833 \beta^4] +$$

$$+ \frac{4}{9} \frac{\gamma_м H^3 \gamma^3 [9 + 6 \beta \ln \beta - 8 \beta - 1/\beta^2]}{E (1-\beta) D^2} [0{,}2917 \beta^4 - 1{,}2 \beta^5 -$$

$$- \beta^6 (0{,}5 \ln \beta - 1{,}333) + \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) - 0{,}0032312] \Big\}.$$

Учитывая, что $(1+\gamma)/\gamma = 1/\beta$ и $1+\gamma = 1/(1-\beta)$, окончательно для $\varphi$ получаем

$$\varphi = \frac{c_x \rho v^2 \alpha \Delta t}{3 \pi G \delta} \frac{H^4}{D^3} x \left[ k_1 + k_2 \frac{4}{9} \frac{\gamma_м}{E} \frac{H^3}{D^2} \right], \tag{11}$$

где

$$k_1 = \frac{0{,}0051 + \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) + 0{,}5 \beta^6 - 0{,}08333 \beta^4}{\beta^3 (1-\beta)^4},$$

$$k_2 = \frac{9 + 6 \beta \ln \beta - 8 \beta - 1/\beta^2}{(1-\beta)^4} x [0{,}2917 \beta^4 - 1{,}2 \beta^5 - \beta^6 (0{,}5 \ln \beta -$$

$$- 1{,}333) + \beta^7 (0{,}2857 \ln \beta - 0{,}4217) - 0{,}0032312].$$

Подставив в формулы (5) и (11) параметры, характеризующие физико-механические свойства материала и конструктивные особенности Останкинской телебашни, а также параметры, характеризующие состояние внешних условий, подсчитаем угол кручения.

При $D=18$ м, $d=8{,}0$ м, $c_x=1{,}0$, $\delta=0{,}4$ м, $\rho=1{,}3$ кг/м³, $H=385$ м, $\alpha=12\cdot10^{-6}$ 1/град, $\gamma_{м}=22000$ Н/м³, $G_{В}=7{,}7\cdot10^{9}$ Н/м², $E=0{,}18\times\times10^{11}$ Н/м², $v=10$ м/с, $\Delta t=10°$ он соответственно составит $\varphi=0{,}170''$ и $\varphi=0{,}173''$. Расчеты угла кручения показывают, что для высоких башенных сооружений его величина составляет десятые доли секунды даже при значительных воздействиях ветра и солнца. Вынос же центра обычно выполняют при облачной погоде и слабом ветре (до 5 м/с), поэтому кручение ствола башни можно не учитывать при выносе центра на монтажный горизонт.

Статья поступила в редколлегию 12. 04 .91