

*А. Л. ЦЕРКЛЕВИЧ, Ю. П. ДЕИНЕКА*

## **О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ИЗОСТАЗИИ**

Прогресс в изучении гравитационного поля Земли и накопление новых фактических данных о ее внутреннем строении вновь привлекают внимание исследователей к проблемам изостазии. Первоначально термин «изостазия» был введен для обозначения механического равновесия плотностных неоднородностей во внешней оболочке Земли. Близость Земли к изостатическому равновесию следует из известного факта близости ее формы к гидростатически равновесному состоянию, т. е. к тому состоянию, которое занимала бы жидкая планета. Со временем тер-

мин «изостазия» претерпел значительную эволюцию. Сейчас в понятие «изостазия» вкладывают более широкий смысл: это и механическое равновесие литосферы [5], и динамическое равновесие [6], и тенденция к компенсации неоднородностей глубоких горизонтов мантии [8] и т. д. Однако в таком многообразии подходов отмечается определенная неоднозначность в понимании изостазии. По-видимому, здесь идет речь только о моделях изучения изостатического состояния и о моделях процессов нарушения и восстановления изостазии, которые сами по себе неоднозначны. Тем не менее поиск новых альтернативных решений и моделей равновесия, которые способствовали бы оптимальному анализу наблюдаемых геофизических данных и выполнению эффективной проверки имеющихся моделей с целью выбора наиболее адекватной модели, является актуальной задачей в изучении строения Земли.

Очевидно, понятию «изостазия» следует придать более широкое толкование, а именно: как стремление масс, слагающих Землю, к состоянию минимума потенциальной энергии, а также к поддержанию условия

$$\int_{t(\theta, \lambda)}^{R(\theta, \lambda)} \rho(r, \theta, \lambda) r^2 dr - \int_0^{R(\theta, \lambda)} \rho_n(r) r^2 dr = 0, \quad (1)$$

где  $r, \theta, \lambda$  — сферические координаты;  $t(\theta, \lambda)$  — высота дневной поверхности;  $\rho(r, \theta, \lambda)$  — трехмерное распределение плотности;  $\rho_n(r)$  — сферически-симметричное распределение плотности.

Выражение (1) описывает изостатическую плотностную модель Земли [2]. Отклонение от нее реальных масс — это малые величины, которые и подлежат изучению. Обычные методы построения изостатических моделей основываются на решении прямой задачи гравиметрии в трехмерном варианте. При этом применяются два метода [1]. Первый основан на вычислениях аномалий давления на предполагаемой глубине изостатической компенсации или на какой-либо структурной границе, например, границе Мохоровичича. Для вычислений используются результаты ГСЗ с последующим пересчетом скоростей сейсмических волн в плотности в соответствии с известной эмпирической зависимостью между этими величинами. Второй подход, более распространенный, основан на вычислениях изостатических аномалий силы тяжести. Для качественной оценки полноты осуществления изостазии обычно вводят условие равновесия в теоретическое значение силы тяжести. В этом случае изостатические аномалии силы тяжести будут непосредственно указывать на наличие масс, не укладываемых в принимаемую схему изостазии.

Условие равновесия можно задать посредством некоторой гипотезы о способе осуществления изостазии. Обычно в практике вычисления изостатических аномалий принимаются две основные гипотезы — Эри и Пратта и их модификации. Обе гипотезы — локальные модели компенсации. Их недостаток заключается в том, что они не дают правильного объяснения поведения коры под действием поверхностных нагрузок, так как очевидно любая, сколь угодно малая поверхностная нагрузка должна вызывать вертикальные движения для установления компенсации и, следовательно, изостатического равновесия. В связи с этим возникла необходимость построения таких моделей, которые учитывали бы региональную компенсацию поверхностной нагрузки. В данном случае одной из самых простых механических моделей является представление о литосфере как о тонкой упругой пластине, покоящейся на жидком субстрате. Впервые такую модель региональной компенсации предложил Венинг-Мейнес в 1931 г. [15]. Идею региональной компенсации поддерживали другие исследователи [14], которые, однако, вместо тонкой пластины рассматривали упругий слой конечной толщины. Впрочем, в крупномасштабном приближении при решении задач об изостатическом равновесии принципиальных различий в моделях тонкой пластины и упругого слоя нет.

Попытки создания в некотором роде обобщенных и технологичных моделей привели к построению моделей изостазии, основанных на статистическом подходе. В работах Л. Дормана и Б. Льюиса [9, 10, 13] положено начало новому направлению в изучении изостазии, так называемой «экспериментальной изостазии», или методу кросс-спектрального анализа данных (методу передаточных функций — ПФ) \*.

Предполагается [5], что аномалия силы тяжести  $\Delta g$  в точке  $r_0$  связана с высотой рельефа  $h$  в точке  $r$  соотношением

$$\Delta g(r_0) = \int f(|r_0 - r|) h(r) ds + g, \quad (2)$$

где  $r$  — текущая координата на плоскости  $s$ ;  $f$  — неизвестная весовая функция расстояния между точками;  $\tilde{g}$  — вклад в  $\Delta g$  неизостатической природы (шумовая компонента).

Применив преобразование Фурье, выражение (2) можно представить в спектральной форме:

---

\* Использование ПФ для вычисления изостатических аномалий силы тяжести излагалось на X Междугосударственном совещании по изучению СВДЗК на геодинамических полигонах СССР (26—30 ноября 1984 г.) в докладе Церклевича А. Л., Волжанина С. Д., Дейнеки Ю. П., Лопатьева А. А. «Сравнительный анализ геофизических полей и исследование напряженно-деформированного состояния литосферы Восточной Европы».



$$\Delta G(k) = F(k) H(k) + \bar{G}(k), \quad (3)$$

где  $\Delta G$ ,  $H$ ,  $\bar{G}$  — двумерные преобразования Фурье от аномалии силы тяжести, топографии и шума;  $k$  — волновое число. Функция  $F(k)$ , называемая передаточной, или адмиттансом, зависит от распределения аномальной плотности, обеспечивающей компенсацию единичного элемента поверхностной нагрузки, т. е. зависит от модели изостатической компенсации.

Заметим, что метод адмиттанса возник в статистической теории связи и автоматического регулирования. Оптимальная оценка  $F(k)$  по способу наименьших квадратов имеет вид

$$\tilde{F}(k) = \frac{\langle \Delta G(k) H^*(k) \rangle}{\langle H(k) H^*(k) \rangle}. \quad (4)$$

В формуле звездочка означает комплексное сопряжение, угловые скобки — усреднение по всей изучаемой поверхности.

Таким образом, определив  $\tilde{F}(k)$  из вычислительного эксперимента на основании наблюдаемых данных, можно сделать определенные выводы о механизме изостатической компенсации структур исследуемого региона. Более подробно этот подход к изучению изостазии описан в [2, 5, 9].

Рассмотрим, как этот метод можно применить для вычисления изостатических аномалий силы тяжести, покрывающих значительную территорию. Предположим, что в нашем распоряжении имеются площадные данные аномалий в свободном воздухе  $\Delta g$  и высот рельефа  $h$  на ограниченном участке сферической поверхности. Математическое моделирование этих скалярных полей использует метод, основанный на ортогональном разложении по системе сферических функций характеристик поля ( $\Delta g$  или  $h$ ).

Пусть на единичной сфере  $P$  задан участок  $s$ , ограниченный параллелями с широтами  $\varphi = a$ ,  $\varphi = b$  и меридианами с долготами  $\lambda = c$ ,  $\lambda = d$  [4]. Путем преобразования координат выполняется эквивалентное отображение участка  $s$  сферы на поверхность единичной сферы  $P$ . Для функций  $\Delta g(\varphi, \lambda)$  или  $h(\varphi, \lambda)$ , заданных на поверхности сферы, справедливы следующие выражения записи ряда Фурье по системе сферических функций:

$$\Delta g(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^{\Delta g} \cos m\lambda + \bar{b}_{nm}^{\Delta g} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi); \quad (5)$$

$$h(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^h \cos m\lambda + \bar{b}_{nm}^h \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (6)$$

где  $\bar{a}_{nm}^{\Delta g}$ ,  $\bar{b}_{nm}^{\Delta g}$  и  $\bar{a}_{nm}^h$ ,  $\bar{b}_{nm}^h$  — коэффициенты разложения ано-

малый силы тяжести и высот рельефа (коэффициенты Фурье), которые вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{matrix} \bar{a}_{nm}^{\Delta g} \\ \bar{b}_{nm}^{\Delta g} \end{matrix} \right\} [\bar{a}_{nm}^h] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta P} \int \Delta g(\varphi, \lambda) [h(\varphi, \lambda)] P_{nm}(\sin \varphi) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} \quad (7)$$

При численном интегрировании присоединенных функций Лежандра использован эффективный алгоритм, основанный на вычислении интегралов вида

$$\int_{\Delta P} \cos \varphi \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} d\varphi d\lambda \quad (8)$$

по рекуррентным формулам [11].

Предположим, что изостатические вариации плотности представляются некоторой линейной и изотропной функцией высот рельефа. Тогда изостатические аномалии силы тяжести вычислим, используя соотношения (5), только в качестве коэффициентов примем

$$\left. \begin{matrix} \bar{a}_{nm}^{\Delta g_i} \\ \bar{b}_{nm}^{\Delta g_i} \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \bar{a}_{nm}^{\Delta g} - \lambda_n \bar{a}_{nm}^h \\ \bar{b}_{nm}^{\Delta g} - \lambda_n \bar{b}_{nm}^h \end{cases}, \quad (9)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^{\Delta g} \bar{a}_{nm}^h + \bar{b}_{nm}^{\Delta g} \bar{b}_{nm}^h)}{\sum_{m=0}^n [(\bar{a}_{nm}^h)^2 + (\bar{b}_{nm}^h)^2]}. \quad (10)$$

Заметим, что в определенных случаях, когда  $\lambda_n = 1$  и  $\lambda_n = 0$ , изостатические аномалии  $\Delta g_i$  трансформируются в аномалии Буге  $\Delta g_b$  и аномалии в свободном воздухе  $\Delta g$ .

Используя формулы (5), (9) и (10), вычислим изостатические аномалии силы тяжести для региона Восточной Европы, ограниченного географическими широтами 48, 60° и долготами 33, 45°. Аномалии силы тяжести в свободном воздухе, усредненные по 1×1° трапециям, взяты из [12], а высоты рельефа физической поверхности Земли  $h$  сняты с карты масштаба 1 : 5 000 000 и также усреднены по 1×1° трапециям. При аппроксимации этих данных рядами Фурье по сферическим функциям (5) и (6) порядок разложения  $N$  принят равным 12. Средняя квадратическая ошибка аппроксимации аномалий силы тяжести составила  $4.4 \cdot 10^{-5}$  м/с<sup>2</sup>, высот рельефа физической поверхности — 0,01 км. На рис. 1—3 показаны поля высот топографической поверхности, аномалий в свободном воздухе и изостатических аномалий

силы тяжести. Последние отражают распределение аномальных плотностей в литосфере.

Рассмотрим вопрос, к каким напряжениям и скоростям деформации приводят полученные изостатические аномалии. Дадим математическую формулировку задачи по [3]. Если задана аномальная плотность  $\rho$  как функция точек среды, то деформации и напряжения находятся путем решения уравнения механи-

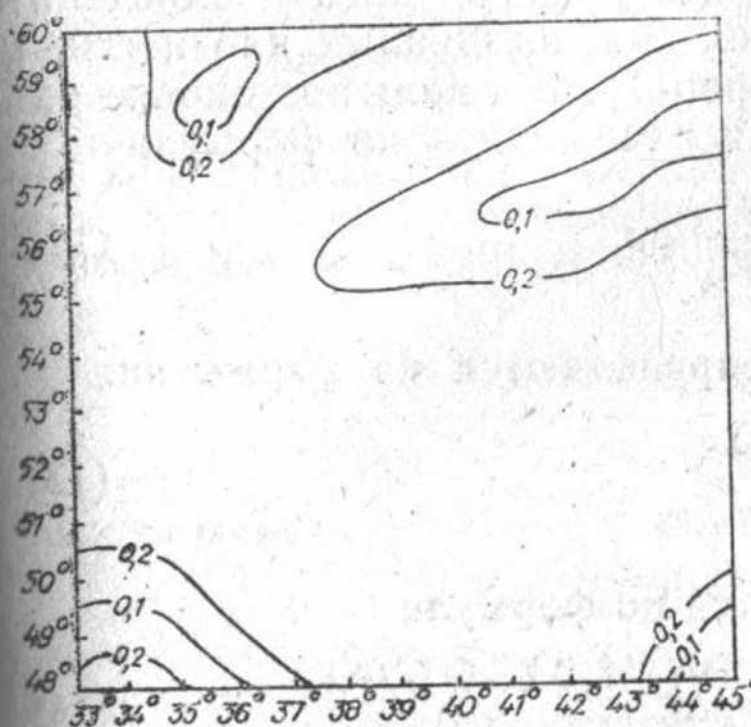


Рис. 1. Высоты рельефа физической поверхности. Изолинии проведены через 0,1 км.

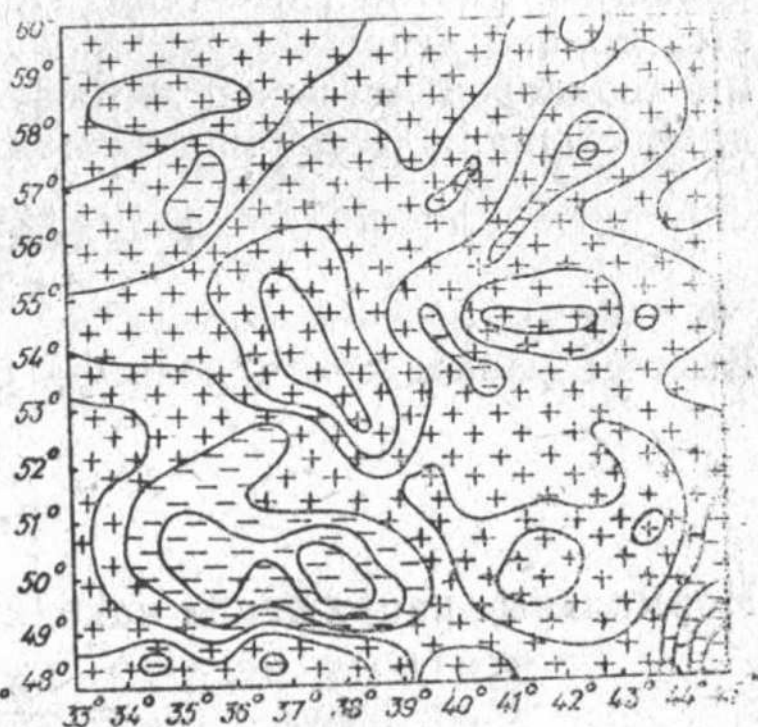


Рис. 2. Модельное поле аномалий в свободном воздухе:

+ — положительные аномалии, — — отрицательные аномалии.

ческого равновесия с объемными силами, которыми является сила тяжести:

$$\Delta p + \mu \Delta v + \rho g = 0. \quad (11)$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $v$  — вектор скорости перемещения;  $p$  — давление;  $g$  — среднее ускорение свободного падения. Соотношение (11) носит название Навье—Стокса в случае пренебрежения инерционными силами и описывает медленное установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости.

Расчет напряженно-де-

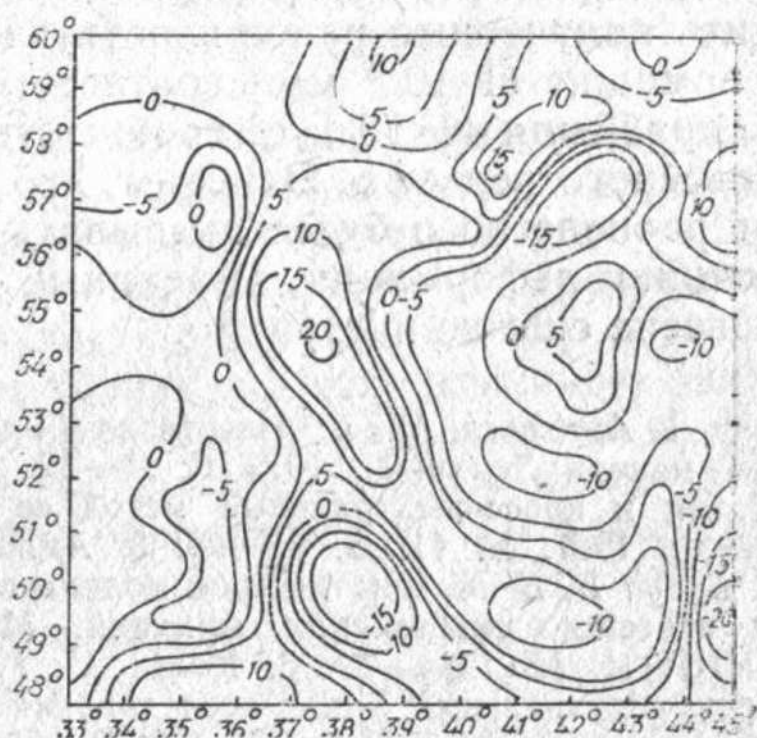


Рис. 3. Модельное поле изостатических аномалий. Изостатические аномалии проведены через  $5 \cdot 10^{-5}$  м/с<sup>2</sup>.



формированного состояния в самой литосфере требует решения уравнения Навье—Стокса для сферической оболочки. Однако поскольку реологическое строение не достаточно хорошо определено и исследуемый регион имеет конкретные размеры, то целесообразно ограничиться постановкой региональной задачи и пренебречь сферичностью Земли. В этом случае результат будем искать в материальном полупространстве, содержащем рассматриваемые плотностные тела. Полное решение задачи определяется только действием внутренних сил, вызванных плотностными неоднородностями в литосфере [7]. В такой постановке задачи скорости деформации можно вычислить по формуле

$$\epsilon_z = \frac{g}{4\pi f \mu} \Delta g_i. \quad (12)$$

Высоты равновесного рельефа определяются из выражения

$$H = \frac{\Delta g_i}{2\pi f \rho_k}. \quad (13)$$

Нормальные напряжения находятся по формуле

$$\sigma_k = \frac{g}{2\pi f} \Delta g_i. \quad (14)$$

В трех последних формулах  $f$  — гравитационная постоянная;  $\rho_k$  — плотность коры.

Таким образом, формулы (12)—(14) позволяют перевычислить полученные ранее изостатические аномалии в скорости деформации ( $1 \cdot 10^{-5}$  м/с<sup>2</sup> соответствует 0,16 мм/год), нормальные напряжения ( $1 \cdot 10$  м/с<sup>2</sup> соответствует  $2,5 \cdot 10^5$  Па) и высоты равновесного рельефа. Отметим, что отклонение реального рельефа от равновесного будет указывать на то, что действуют иные источники деформации, вызванные другими причинами, либо равновесие еще не наступило.

1. Артемьев М. Е. Изостазия // Гравитационная модель коры и верхней мантии Земли. К., 1979. С. 28—32.
2. Артемьев М. Е., Кабан М. К. Изостазия и кросс-спектральный метод ее изучения // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. № 11. С. 85—98.
3. Артюшков Е. В. Геодинамика. М., 1979.
4. Бузук В. В. Математическое моделирование скалярных полей рядом Фурье по системе сферических функций. М., 1979. — 39 с. Рукопись деп. в ВИНТИ. № 1284—79.
5. Коган М. Г., Магницкая Е. И., Чернова Н. И. Кросс-спектральный метод исследования изостазии океанических и континентальных структур // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. № 11. С. 71—84.
6. Лунев Б. В. Изостазия как динамическое равновесие вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 72—76.
7. Маслов Л. А. Расчет деформаций поверхности Земли по гравитационным данным // Геол. и геофиз. 1985. № 5. С. 30—35.
8. Тараканов Ю. А., Черевко Т. Н. Интерпретация

крупномасштабных гравитационных аномалий Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 4. С. 25—42. 9. *Dorman L. M., Lemis B. T. R.* Experimental isostasy. 1. Theory of the determination of the Earth's isostatic response to a concentrated load // *J. Geophys. Res.* 1970. V. 5. N 17. P. 3357—3365. 10. *Dorman L. M., Lemis B. T. R.* Experimental isostasy. 3. Inversion of the isostatic Green Function and lateral density changes // *J. Geophys. Res.* 1972. V. 77. P. 3068—3077. 11. *Gerstl M.* On the recursive computation of the integrals of the associated Legendre Functions // *Manuscr. geod.* 1980. V. 5. N 3. P. 181—199. 12. *Lerch F. J., Putney B., Klosko S. et al.* Goddard Earth Models for oceanographic applications (GEM—10B and 10C) // *Mar. Geod.* 1981. V. 5. N 2. P. 145—187. 13. *Lemis B. T. R., Dorman L. M.* Experimental isostasy. 2. An isostatic model for the USA derived from gravity and topographic data // *G. Geophys. Res.* 1970. V. 75. P. 3367—3386. 14. *Mc Kenzie D., Bowin C.* The relationship between bathymetry and gravity in the Atlantic Ocean // *J. Geophys. Res.* 1976. V. 81. N 11. P. 1903—1915. 15. *Vening Meinesz F. A.* Gravity over Hawaiian Archipelago and over the Madeira area // *Pros. K. Nod. Akad. Delft.* 1941. P. 44.

Статья поступила в редколлегию 19. 03. 91