УДК 528.22

І. Ф. МОНІН

ПРО ОДИН МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЗОВНІШНЬОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

В [2] запропонована замкнена формула для визначення аномального гравітаційного потенціалу T на топографічній поверхні Землі S і у зовнішньому просторі:

$$T = \frac{f\,\Delta M}{z} + \frac{1}{4\pi}\int \Delta g \left\{\left(F_1 - \frac{1}{z}\right)\cos\alpha + F_3 \sin\alpha\cos\Theta\right\} dS + \\ + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial\,\Delta g}{\partial n}\rho\left(F_2 - \frac{1}{z}\right) dS, \quad (1)$$

де Δg — змішана аномалія сили тяжіння; $\partial\Delta g/\partial n$ — похідна щодо зовнішньої нормалі n поверхні S (поверхня S одержана відкладанням нормальних висот H від поверхні референц-еліпсоїда на нормалях до нього); ΔM — різниця мас Землі та еквіпотенціального земного еліпсоїда; f — гравітаційна стала; α — кут нахилу елемента dS; ρ, z — радіуси-вектори змінної точки поверхні S і фіксованої, відстань між ними визначається формулою

$$r_1^2 = z^2 + \rho^2 - 2z\rho\cos\psi; \quad (2)$$

F_1, F_2, F_3 — відомі функції;

$$F_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{\rho}{z^2}\cos\psi;$$

$$F_2 = \frac{1}{z^2}\left(\rho\cos\psi + r_1 + \rho\cos\psi\ln\frac{z + r_1 - \rho\cos\psi}{2z}\right);$$

$$F_3 = \frac{\rho}{z^2}\left(\sin\psi\ln\frac{z + r_1 - \rho\cos\psi}{2z} - \frac{\rho\cos\psi - z\cos 2\psi}{r_1\sin\psi} - \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi}\right);$$

$$f\,\Delta M = \frac{1}{4\pi}\int\left(\Delta g\cos\alpha + \rho\frac{\partial\,\Delta g}{\partial n}\right)dS. \qquad (3)$$

Формула (1) одержана [2] без проміжних математичних доведень. Вирази для $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ і відхилення виска ξ майже зовсім не доведені, тому виникли сумніви про дійсність розвинутої теорії [2] (про це свідчить той факт, що робота [2] не одержала відображеня в [3]). Нижче подано доведення зазначених формул.

Застосуємо формулу, одержану М. С. Молоденським [1]:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho}\sec\alpha - \bar{D}(F, H)\cos\alpha, \qquad (4)$$

де F — довільна функція трьох ортогональних криволінійних координат, яка має перші похідні; $H = H(\Phi, L)$ — рівняння поверхні S; Φ — геоцентрична широта; L — довгота; $\bar{D}(F, H)$ — оператор, введений М. С. Молоденським, зокрема

$$\bar{D}(F, H) = D(F, H) + \frac{\partial F}{\partial \rho}\operatorname{tg}^2\alpha; \qquad (5)$$

$$D(F, H) = \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial \Phi}\cdot\frac{\partial H}{\partial \Phi} + \frac{\sec^2\Phi}{\rho^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{\partial H}{\partial L}. \qquad (6)$$

Нехай $F = 1/r$ (якщо фіксована точка знаходиться на поверхні Землі, то $r_1 = r$, $z = \rho_0$). Тоді

$$D\left(\frac{1}{r}, H\right) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\rho_0}{r^3}\sin\psi\operatorname{tg}\alpha\cos\Theta, \qquad (7)$$

бо $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{r}\sin\psi\cos A'$, $\quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{r}\sin\psi\sin A'$,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha\cos A_1', \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \operatorname{tg}\sin A_1',$$

де x, y — напрямки меридіану і першої вертикалі; A' — азимут напрямку від змінної точки поверхні Землі до фіксованої; A_1' — азимут лінії перетину площини ρn з горизонтальною площиною, що проведена у змінній точці поверхні S; $A'—A_1'=\theta$.

Підставивши (7) в (5), знайдемо

$$\bar{D}\left(\frac{1}{r}\cdot H\right)=\frac{\rho_0}{r^3}\sin\psi\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\Theta+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{tg}^2\,\alpha, \tag{8}$$

а підставивши (8) в (4), одержимо

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}\sec\alpha-\frac{\rho_0}{r^3}\sin\psi\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\Theta\cos\alpha-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{tg}^2\,\alpha\cos\alpha=$$

$$=\frac{\rho_0\cos\psi-\rho}{r^3}\cos\alpha-\frac{\rho_0}{r^3}\sin\psi\sin\alpha\cos\Theta. \tag{9}$$

Формулу (9) легко одержати з геометричних міркувань. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{\cos(r,n)}{r^2}=-\frac{\cos\omega}{r^2}. \tag{10}$$

Проведемо (рис. 1) через змінну точку B поверхні S три напрямки в просторі: n, ρ, r і сферу довільного радіуса. У сферичному трикутнику $n\rho r$ показані кути α, β, θ і ω, залежність між ними описуємо формулою

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\theta. \tag{11}$$

З рис. 2 знаходимо $\sin\beta$ і $\cos\beta$:

$$\cos\beta=\frac{\rho_0\sin\psi}{r},\quad \cos\beta=\frac{\rho-\rho_0\cos\psi}{r}. \tag{12}$$

Отже, з формул (10), (11) і (12) одержуємо формулу (9).

Виведемо формулу для обчислення відхилень виска в напрямку меридіану ξ на поверхні S. Диференціюючи формулу (1) за напрямком меридіана у фіксованій точці зовнішнього простору та переходячи на поверхню S, помітивши, що в (1) є вираз потенціалу простого шару густини $\Delta g\cos\alpha/4\pi$, запишемо

$$\xi=-\frac{1}{g_0}\lim_{z\to\rho_0}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\Delta g}{2g_e}\cos\alpha\cos(n,x)-\frac{1}{4\pi g_e}\times$$

$$\times\int\Delta g\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{tg}\,\alpha\cos\Theta+F_3\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{tg}\,\alpha\cos\Theta)\right]\times$$

$$\times \cos\alpha \, dS - \frac{1}{4\pi g_e} \int \rho \frac{\partial \Delta g}{\partial n} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x} dS, \tag{13}$$

де похідні знаходять без зайвих труднощів, знаючи, що

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\cos A}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \cos(n, x) = -\sin\alpha \cos A_1,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\rho}{r} \sin\psi \cos A;$$

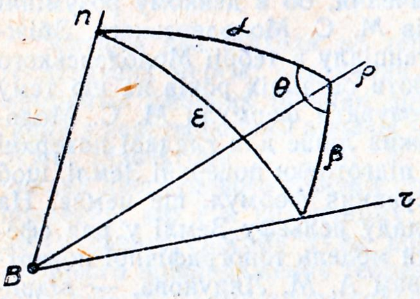

Рис. 1. До визначення кута ω.

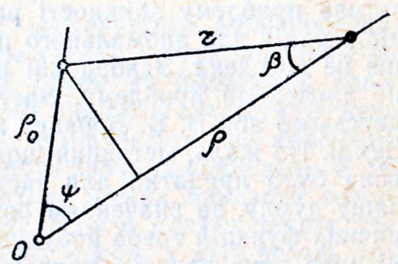

Рис. 2. До визначення кута β.

A — азимут напрямку від фіксованої точки до змінної; A_1 — азимут лінії перетину площини $\rho_0 n$ з горизонтальною площиною, що проходить через фіксовану точку поверхні S.

При визначенні похідної $\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{tg}\,\alpha \cos\theta)$ у формулі (13) треба мати на увазі, що після диференціювання за x змінюється напрямок лінії r, а також кут θ у змінній точці. Тому, замінивши $\mathrm{tg}\,\alpha \cos\theta$ через $\partial H/\partial s$, знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{tg}\,\alpha \cos\Theta) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\cos A}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right) =$$

$$= -\frac{\rho}{\rho_0} \cos A \frac{\partial}{\rho \partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right) = -\frac{\rho}{\rho_0} \cos A \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}, \tag{14}$$

де $\partial H/\partial s$ — нахил елемента поверхні S (тут s — малий відрізок в горизонтальній площині) в напрямку від змінної точки до фіксованої.

Формулу (14) можна одержати інакше: при першому напрямку лінії r нахил елемента dS дорівнює $\partial H/\partial s$, при другому напрямку r' нахил елемента зміниться і стане $\partial H'/\partial s'$. Отже, маємо

$$(\partial H'/\partial s' - \partial H/\partial s):\partial x = \frac{\dfrac{\partial H'}{\partial s'} - \dfrac{\partial H}{\partial s}}{\rho_0\,\partial\Phi} = -\frac{\rho}{\rho_0}\cos A\,\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}.$$

Слід зазначити, що похідну $\partial\Delta g/\partial n$ треба виразити через вертикальну $\partial\Delta g/\partial\nu$ та горизонтальну $\partial\Delta g/\partial\tau$ складові:

$$\partial\Delta g/\partial n = \cos\alpha\cdot\partial\Delta g/\partial\nu + \sin\alpha\cdot\partial\Delta g/\partial\tau \qquad (15)$$

і вимірювати з урахуванням сотих етвеша. Тому формула (1) зараз має тільки теоретичне значення, бо в деякому розумінні знімає проблему збіжності рядів М. С. Молоденського. Збіжність рядів для аномального потенціалу в теорії Молоденського ще не доведена. Закордонні роботи останніх років на цю тему не прояснили проблему. Застосовувати формули М. С. Молоденського або В. В. Бровара можна лише для гладкої поверхні Землі. На жаль, методики щодо підготовки поверхні Землі, щоб вона була придатна для застосування формул, ще немає. На нашу думку, за значенням розкладу рельєфу Землі у ряд сферичних функцій треба побудувати модель топографічної поверхні, щоб вона задовольняла умовам А. М. Ляпунова, — відповідно виконати обробку зовнішнього гравітаційного поля на цій моделі. На такій моделі можна довести збіжність рядів М. С. Молоденського і вивчати фігуру Землі.

Деякі автори виконали і рекомендують застосовувати різні апроксимації відомих розв'язків. Треба зауважити, що будь-яка апроксимація змінює загальне гравітаційне поле Землі. Дуже неприємна площинна апроксимація. Краща сферична, але її треба застосовувати дуже обережно. Особливо безпечним є застосування залежностей між гармонічними функціями для сфери або площини. Якщо розв'язки, одержані на припущенні аналітичного продовження потенціалу через межу поля, співпадають з розв'язками М. С. Молоденського або В. В. Бровара, то з цим ніяк не можна погодитися. Треба шукати помилки. А вони полягають в тому, що застосовувалися формули для сферичного поля або навіть для площинного поля, чого не можна допускати. Всі формули повинні бути виведеними лише для топографічної поверхні Землі. Якщо ряди М. С. Молоденського є рядами Тейлора або близькими до них, то така теорія не може бути успішною. Фізичний зміст функцій, що є в цих рядах, зовсім різний, що очевидно.

1. *Молоденський М. С.* Основные вопросы геодезической гравиметрии // Тр. ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42. С. 1—107. 2. *Монин И. Ф.* Новый метод вычисления элементов внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли // Астроном. журн. АН СССР. 1966. Т. 13. Вып. 3.

С. 670—677. 3. *Пеллинен Л. П., Нейман Ю. М.* Физическая геодезия // Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка. 1980. С. 1—132.

Стаття надійшла до редколегії 05. 09. 91