УДК 528.14.16

І. Ф. МОНІН

ПРО ВИКЛАД ТЕОРІЇ ДВОГРУПОВОГО ВРІВНОВАЖЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ

Існують два підходи до теорії двогрупового врівноваження геодезичних мереж: класичний, пов'язаний з перетворенням коефіцієнтів умовних рівнянь другої групи, та ймовірний, пов'язаний з перетворенням вільних членів рівнянь у статистично незалежні підвектори [1, 2, 3]. У [3] зазначається, що класичний виклад двогрупового способу потребує значних обчислень. У [4] показано, що і в класичному підході можна викласти теорію двогрупового способу дуже просто. Нижче подана теорія двогрупового врівноваження геодезичних мереж, у якій досить просто і одночасно перетворюються коефіцієнти і вільні члени умовних та нормальних рівнянь другої групи.

Нехай умовні рівняння в геодезичній мережі поділені на дві групи [4]:

$$aV+w_a=0; \tag{1}$$

$$\alpha V+w_\alpha=0. \tag{2}$$

Запишемо матричні рівняння (1), (2) у блочному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} V+\begin{pmatrix} W_a \\ W_\alpha \end{pmatrix}=0. \tag{3}$$

Тоді відповідні їм нормальні рівняння, як відомо, можна записати так:

$$\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}(a^{\mathrm{T}}\,\alpha^{\mathrm{T}})\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} W_a \\ W_\alpha \end{pmatrix}=0,$$

або

$$aa^{\mathrm{T}}k_1+a\alpha^{\mathrm{T}}k_2=w_a=0; \tag{4}$$

$$\alpha a^{\mathrm{T}}k_1+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}k_2+w_\alpha=0. \tag{5}$$

Якщо в (4) і (5) виключити вектор корелят умовних рівнянь першої групи k_1, то одержимо перетворені нормальні рівняння другої групи:

$$\{\alpha - \alpha a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} a\} \alpha^{\mathrm{T}} k_2 + \{w_\alpha - \alpha a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} w_a\} = 0. \qquad (6)$$

Дійсно, у рівнянні (6) маємо перетворення вільних членів і коефіцієнтів, про що свідчать рівняння безпосередньо. У фігурних дужках подано алгоритм перетворення коефіцієнтів і вільних членів умовних рівнянь другої групи. Якщо ввести позначення

$$A = \alpha - \alpha a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} a; \qquad (7)$$

$$W = w_\alpha - \alpha a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} w_a, \qquad (8)$$

то (6) набирає кінцевого вигляду

$$AA^{\mathrm{T}} k_2 + W = 0, \qquad (9)$$

тому що

$$AA^{\mathrm{T}} = \{\alpha - \alpha a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} a\} \{\alpha^{\mathrm{T}} - a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} a \alpha^{\mathrm{T}}\} = \\ = \{\alpha - \alpha a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} a\} \alpha^{\mathrm{T}}. \qquad (10)$$

Відомо, що теорія двогрупового способу врівноваження базується на ідеї незалежного розв'язку умовних рівнянь першої та другої груп за допомогою методу найменших квадратів. Причому з розв'язку першої групи одержують первинні поправки v', а з розв'язку перетвореної системи умовних рівнянь другої групи — вторинні поправки v''. Сума первинних і вторинних поправок

$$v' + V'' = V \qquad (11)$$

є остаточним розв'язком загальної системи (1), (2).

Підставивши (11) в (1), запишемо ще раз систему умовних рівнянь першої групи:

$$av' + av'' + w_a = 0. \qquad (12)$$

Щоб (12) було незалежним від (2), необхідно

$$av'' = 0. \qquad (13)$$

І тоді, розв'язуючи (12) за методом найменших квадратів, знайдемо корелати і первинні поправки:

$$k_1 = -(aa^{\mathrm{T}})^{-1} w_a, \quad v' = a^{\mathrm{T}} k_1 = -a^{\mathrm{T}} (aa^{\mathrm{T}})^{-1} w_a. \qquad (14)$$

Розв'язок рівняння (9) дає корелати k_2 та вторинні поправки:

$$k_2 = -(AA^{\mathrm{T}})^{-1} W, \quad v'' = A^{\mathrm{T}} k_2 = -A^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} W. \qquad (15)$$

Зрозуміло, що корелати k_1 і k_2 у (14) і (15) мають зовсім інші числові значення, ніж у (4) та (5). Вірність одержаних розв'язків перевіряється багатьма контрольними формулами, які тут не наводимо.

Одержимо формулу для ваги врівноваженої функції F. Для цього істинну поправку врівноваженої функції запишемо так:

$$\Delta_F = F(l+\Delta) - F(l+v'+v''), \tag{16}$$

де l — виміряна величина; Δ — істинна поправка у вимірі.

Тоді у лінійному наближенні

$$\Delta_F = f^{\mathrm{T}}(\Delta - v' - v''), \tag{17}$$

де

$$f^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\ \frac{\partial F}{\partial l_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial l_n}\right), \quad \Delta^{\mathrm{T}} = (\Delta_1\ \Delta_2 \cdots \Delta_n).$$

Виразимо v' і v'' через істинні поправки Δ. Неважко показати, що

$$v' = +a^{\mathrm{T}}(aa^{\mathrm{T}})^{-1}a\Delta, \quad v'' = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A\Delta. \tag{18}$$

Отже, (17) з врахуванням (18) набуде вигляду

$$\Delta_F = f^{\mathrm{T}}\{E - a^{\mathrm{T}}(aa^{\mathrm{T}})a - A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A\}\Delta, \tag{19}$$

де E — одинична матриця. Піднесемо вираз (19) до квадрата:

$$m_F^2 = \Delta_F \Delta_F^{\mathrm{T}} = f^{\mathrm{T}}\{E - \cdots\}\Delta\Delta^{\mathrm{T}}\{E - \cdots\}f. \tag{20}$$

Ми одержали квадрат середньої квадратичної помилки m_F функції врівноважених величин. Добуток $\Delta\Delta^{\mathrm{T}}$ у загальному випадку вимірювань дорівнює кореляційній матриці $\sigma^2 Q$ (де σ — помилка одиниці ваги). Однак при складанні нормальних рівнянь виміри брались нами рівноточними з вагою одиниця. Тому $Q = E$ і формула (20) спрощується:

$$m_F^2 = \sigma^2 f^{\mathrm{T}}\{E - a^{\mathrm{T}}(aa^{\mathrm{T}})^{-1}a - A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A\}f. \tag{21}$$

У [5] одержана формула для перетворення матриці f у двогруповому способі:

$$F^{\mathrm{T}} = f^{\mathrm{T}} - f^{\mathrm{T}}a^{\mathrm{T}}(aa^{\mathrm{T}})^{-1}a. \tag{22}$$

Крім того, показано [6], що

$$f^{\mathrm{T}}f - f^{\mathrm{T}}a^{\mathrm{T}}(aa^{\mathrm{T}})^{-1}af = F^{\mathrm{T}}F,$$

$$f^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = F^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, \quad Af = AF. \tag{23}$$

Таким чином, з урахуванням (22) і (23) маємо:

$$1/P_F = F^{\mathrm{T}}F - F^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}AF, \tag{24}$$

де P_F — вага функції F. Зауважимо, що матриця F (позначення тут співпадають, але вони загальноприйняті) перетворюється за тим же правилом, що й матриці A і W (див. формули (7) і (8)).

Отже, класичний підхід викладу теорії двогрупового врівноваження більш ефективний і зрозумілий.

1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. М., 1979. 2. *Маркузе Ю. И.* Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. М., 1972. 3. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982. 4. *Монин И. Ф.* К теории двухгруппового уравнивания коррелированных величин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1984. Вып. 40. С. 86—90. 5. *Монин И. Ф.* Об оценке точности двухгруппового уравнивания коррелированных величин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 69—71. 6. *Монин И. Ф.* К оценке точности двухгруппового уравнивания коррелированных величин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1990. Вып. 52. С. 109—110.

Стаття надійшла до редколегії 05. 09. 91