УДК 528.14.16

І. Ф. МОНІН

ДО ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИСОКОТОЧНИХ КУТОВИХ ВИМІРІВ

Виданий у 1989 р. підручник з «Вищої геодезії» М. В. Яковлєва досить повно і сучасно відображає зміст дисципліни, яка вивчається студентами геодезичних спеціальностей. Зробимо зауваження до глави 9 підручника «Теорія і методи високоточних кутових вимірів».

Поставивши задачу вимірів та обробки результатів у довільному порядку спостережень (§ 68), автор складає рівняння поправок параметричного методу і в загальному вигляді записує нормальні рівняння. Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N настільки складна, що читати цей параграф не зможе навіть добре підготовлений студент. Ця матриця далі не використовується, розв'язок нормальних рівнянь подано у загальному вигляді, окремих випадків не наведено. Не зрозуміло, навіщо було складати матрицю N і утрудняти відомі положення параметричного методу врівноваження.

Наступний § 69 має значний інтерес, але зміст його подано так, що зрозуміти його суть зможе не кожен викладач. Автору треба було при цьому скористатися книгою П. О. Гайдаєва [1], де дуже добре висвітлено це питання. Формули (9.22) і (9.23) підручника [3] при такому великому його обсязі обов'язково повинні бути доведені, особливо формула (9.23), яка є новою. Залишилось також незрозумілим, як обчислювати параметр ε_i у рівняннях (9.1). Не доведені формули (9.16), які є головними у методі вимірювання кутів у всіх комбінаціях.

Таким чином, розвинута М. В. Яковлєвим [3] у главі 9 теорія не є цільним, послідовним та кінцевим тлумаченням відомих положень математичної обробки результатів високоточних кутових вимірів.

Використовуючи сучасний математичний апарат методу найменших квадратів, подамо основні положення теорії обробки високоточних кутових вимірів для двох методів, що застосовуються на виробництві. При цьому скористаємося шляхами П. О. Гайдаєва [1] та Ю. І. Маркузе [2] з деякими доповненнями.

Метод кругових прийомів. Нехай на геодезичному пункті вимірюють n напрямків m круговими прийомами. Введемо позначення: $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ — виміряні напрямки в першому прийомі; $V_1, V_2, V_3, \ldots V_n$ — поправки до напрямків, одержані після врівноваження.

Для складання параметричних рівнянь візьмемо такі незалежні параметри: $dz_1, dz_2, dz_3, \ldots, dz_m$ — поправки у зв'язуючі кути між нулем на лімбі теодоліта і першим напрямком відповідно для кожного прийому та $dN_{12}, dN_{13}, \ldots, dN_{1n}$ — поправки в кути між першим і наступними напрямками. Отже, чисельність усіх вимірів буде $m \cdot n$, кількість параметрів $m+n-1$. Кількість надмірних вимірів дорівнює різниці, тобто $m \cdot n-(m+n-1)=$ $=(m-1)(n-1)$.

Як прийнято на виробництві, перший напрямок M_1 будемо вважати нульовим (змінюючи інші напрямки на відповідну величину). Тоді параметричні рівняння для першого прийому одержати неважко:

$$\begin{aligned}
V_1 &= dz_1 \\
V_2 &= dz_1 + dN_{12} + l_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
V_n &= dz_1 + dN_{1n} + l_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

де $l_2, l_3, \ldots, l_n$ — вільні члени, зокрема

$$\begin{aligned}
l_2 &= N_{12}^0 - M_2, \\
l_3 &= N_{13}^0 - M_3, \\
&\cdots\cdots \\
l_n &= N_{1n}^0 - M_n,
\end{aligned} \tag{2}
\qquad
\begin{aligned}
N_{12}^0 &= \frac{1}{m}\sum_1^m M_2, \\
&\cdots\cdots \\
N_{1n}^0 &= \frac{1}{m}\sum_1^m M_n.
\end{aligned} \tag{3}$$

При складанні параметричних рівнянь взяті початкові параметри $N^0_{12}, N^0_{13}, \cdots, N^0_{1n}$, які обчислювались за формулами (3).

Розв'язуючи рівняння (1) за методом найменших квадратів з урахуванням всіх прийомів і рівноточності вимірів з вагою одиниця, неважко записати нормальні рівняння:

$$\begin{pmatrix} ab^{\mathrm{T}} \\ bc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dz \\ dN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де

$$a = nE^{m\cdot m}; \quad b^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 11\cdots 1 \\ 11\cdots 1 \\ \cdot \ \ \cdot \ \ \cdot \\ 11\cdots 1 \end{pmatrix}^{m\cdot(n-1)}; \quad c = mE^{(n-1)(n-1)};$$

$$dz = \begin{pmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_m \end{pmatrix}; \quad dN = \begin{pmatrix} dN_{12} \\ dN_{13} \\ \vdots \\ dN_{1n} \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} [l_i]_1 \\ [l_i]_2 \\ \vdots \\ [l_i]_m \end{pmatrix};$$

$[l_i]_1 = l_2 + l_3 + \ldots + l_n$ — у першому прийомі;
$[l_i]_2 = l_2 + l_3 + \ldots + l_n$ — у другому прийомі;
$[l_i]_m = l_2 + l_3 + \ldots + l_n$ — у m-му прийомі;
E — одинична матриця, квадратна різних порядків.

Розв'язок нормальних рівнянь (4) дає невідомі параметри:

$$-\begin{pmatrix} dz \\ dN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab^{\mathrm{T}} \\ bc \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Знайдемо обернену матрицю в (5). Нехай

$$\begin{pmatrix} ab^{\mathrm{T}} \\ bc \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} xy^{\mathrm{T}} \\ yz \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Тоді, не зупиняючись на простих розрахунках, запишемо

$$z = (\bar{c})^{-1} = (c - ba^{-1}b^{\mathrm{T}})^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2\ 1 \ldots 1 \\ 1\ 2 \ldots 1 \\ \ldots\ldots \\ 1\ 1 \ldots 1 \end{pmatrix}^{(n-1)(n-1)}; \tag{7}$$

$$ba^{-1}b^{\mathrm{T}} = \frac{m}{n} \begin{pmatrix} 11\ldots 1 \\ 11\ldots 1 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 11\ldots 1 \end{pmatrix}^{(n-1)(n-1)}, \qquad -y = (\bar{c})^{-1}ba^{-1} =$$

$$=\frac{1}{m}\begin{pmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 11\ldots1 \end{pmatrix}^{(n-1)m}; \tag{8}$$

$$x=a^{-1}+a^{-1}b^{T}(\bar{c})^{-1}ba^{-1}=\frac{1}{mn}\begin{pmatrix} (m+n-1)\,(n-1)\ldots(n-1) \\ (n-1)\,(m+n-1)\ldots(n-1) \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ (n-1)\,(n-1)\ldots(m+n-1) \end{pmatrix}^{mm}, \tag{9}$$

$$a^{-1}b^{T}(\bar{c})^{-1}ba^{-1}=\frac{n-1}{mn}\begin{pmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \ldots\ldots \\ 11\ldots1 \end{pmatrix}^{m\cdot m}.$$

Отже, приходимо до результату:

$$dz=\begin{pmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_m \end{pmatrix}=-xw=-\frac{1}{n}\begin{pmatrix} [l_i]_1 \\ [l_i]_2 \\ \vdots \\ [l_i]_m \end{pmatrix}; \tag{10}$$

$$dN=\begin{pmatrix} dN_{12} \\ dN_{13} \\ \vdots \\ dN_{1n} \end{pmatrix}=-yw=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Відомо, що діагональні елементи оберненої матриці нормальних рівнянь параметричного методу є обернені ваги параметрів. Отже,

$$\frac{1}{P_{dz_i}}=\frac{m+n-1}{mn},\quad \frac{1}{P_{N_i}}=\frac{2}{m}; \tag{12}$$

$$m_{dz_i}=\mu\sqrt{\frac{m+n-1}{mn}},\quad m_{N_i}=\mu\sqrt{\frac{2}{m}}. \tag{13}$$

Помилка одиниці ваги обчислюється за формулами:

$$\mu^2=\sum_{m,n}V^2/(m-1)(n-1); \tag{14}$$

$$\sum_{m,n}V^2=\sum_{m,n}l^2-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{m}[l]_i^2, \tag{15}$$

що випливає з рівнянь (1) для всіх прийомів.

Для прикладу, що є у підручнику [3], де $\mu=1{,}13''$, $m=12$, $n=4$, маємо $m_{dz_i}=0{,}63$, $m_{N_i}=0{,}46$; помилка врівноваженого напрямку M_i:

$$m_{M_i}=\mu\sqrt{\frac{1}{m}}=0{,}33''\mu\sigma.$$

Одержимо формулу (9.23) з підручника М. В. Яковлєва [3].

$$M_q^2=\frac{(n-2)\,\Sigma v_{ql}^2-\Sigma v_{ik}^2}{m\,(m-1)(n-1)(n-2)}.$$

Маючи n виміряних m прийомами напрямків, легко обчислити всі кути у комбінаціях $(n-1)n/2$. Потім утворимо різниці v, наприклад, при $n=5$ маємо кути і різниці:

$$\begin{array}{cccc} 1\cdot2 & 1\cdot3 & 1\cdot4 & 1\cdot5 \\ & 2\cdot3 & 2\cdot4 & 2\cdot5 \\ & & 3\cdot4 & 3\cdot5 \\ & & & 4\cdot5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ & v_{23} & v_{24} & v_{25} \\ & & v_{34} & v_{35} \\ & & & v_{45}. \end{array}$$

Різницями v будемо оцінювати помилки врівноважених напрямків. Знайдемо середню квадратичну помилку напрямку з номером 1, тобто обчислимо помилку кутів $1\cdot2$, $1\cdot3$, $1\cdot4$, $1\cdot5$. Кути, що залишилися, виразимо через перші так:

$$\begin{array}{ll} 2\cdot3=1\cdot3-1\cdot2, & 3\cdot4=1\cdot4-1\cdot3, \\ 2\cdot4=1\cdot4-1\cdot2, & 3\cdot5=1\cdot5-1\cdot3, \\ 2\cdot5=1\cdot5-1\cdot2, & 4\cdot5=1\cdot5-1\cdot4. \end{array}$$

Таким чином, $\Sigma v_{ik}^2=3\Sigma v_{ql}^2$. У загальному випадку, що легко перевірити, $\Sigma v_{ik}^2=(n-2)\Sigma v_{ql}^2$. І ми оцінимо врівноважений напрямок з номером q двічі: за сумою Σv_{ql}^2 та за сумою $\frac{1}{n-2}\Sigma v_{ik}^2=$ $=\Sigma v_{ql}^2$. Різниця цих сум, поділена на $m(m-1)(n-1)$, дає квадрат середньої квадратичної помилки врівноваженого напрямку з номером q. Ми прийняли $q=1$. Але формула (9.23) дійсна для довільного q від 1 до n. Треба відзначити, що ця формула не випливає з теорії параметричного методу. Згідно з існуючою теорією середня квадратична помилка будь-якого напрямку після врівноваження обчислюється за формулою (16). Для кутів $1\cdot2$, $1\cdot3$, $1\cdot4$, $1\cdot5$ вона обчислюється за формулою (13). Отже, формула (9.23), запропонована М. В. Яковлєвим, ніякого інтересу для теорії математичної обробки кутових вимірів не становить.

Метод вимірювання кутів у всіх комбінаціях. Нехай на геодезичному пункті з n напрямками вимірюють m прийомами $(n-1)n/2$ кутів. Після обчислення середнього арифметичного значення з m прийомів для кожного кута врівноважують кути. Застосовуємо параметричний метод. Незалежними параметрами вважаємо $n-1$ кутів. Кількість надмірних кутів буде $n(n-1)/2-(n-1)=(n-1)(n-2)/2$. Позначимо невідомі параметри через $x, y, z, \ldots, t$. Параметричні рівняння мають вигляд

$$\begin{array}{ll} V_{12}=x-1\cdot 2, & V_{23}=y-x-2\cdot 3-1\cdot 2, \\ V_{13}=y-1\cdot 3, & V_{24}=z-x-2\cdot 4-1\cdot 2, \\ V_{14}=z-1\cdot 4, & V_{34}=z-y-3\cdot 4-1\cdot 3, \\ \ldots & \ldots \end{array} \quad (16)$$

де $1\cdot 2$, $1\cdot 3$, $1\cdot 4$, ..., $2\cdot 3$, $2\cdot 4$; $3\cdot 4$ — виміряні кути m прийомами; V_{12}, V_{13}, V_{23}, V_{24} — поправки у виміряні кути.

Розв'язок рівнянь (16) за методом найменших квадратів з вагою одиниця дає нормальні рівняння:

$$\begin{pmatrix} (n-1)-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1\,(n-1) & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 \;\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 \;\ldots & (n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \cdot \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \\ w_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

і параметри, або врівноважені кути:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

або

$$x=\frac{2\times 1\cdot 2+(1\cdot 3-2\cdot 3)+\cdots+(1\cdot n-2\cdot n)}{n}$$

$$y=\frac{2\times 1\cdot 3+(1\cdot 2+2\cdot 3)+\cdots+(1\cdot n-3\cdot n)}{n}, \ldots \quad (19)$$

Середня квадратична помилка кута, виміряного m прийомами, обчислюється за формулою

$$m^2=\frac{2\Sigma v^2}{(n-1)(n-2)}, \quad (20)$$

а середня квадратична помилка врівноваженого кута —

$$M_x^2=m^2\frac{2}{n}=\frac{4\Sigma V^2}{n(n-1)(n-2)}. \quad (21)$$

1. *Гайдаев П. А.* Математическая обработка геодезических сетей. М., 1977. 2. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982. 3. *Яковлев Н. В.* Высшая геодезия. М., 1989.

Стаття надійшла до редколегії 07. 02. 91