Продовження табл. 2

1	2	3	4
9	Sound card	57,2	SC C-Media 8738 6канали PCI
10	CD-ROM	72,8	CD-ROM 52x LG GCR-8523BB
11	Box	88,4	Rise XTC-B2 SS+17SE білий, 4*5.25", 7*3.5", USB2.0+Audio,Structure dim 510*190*450(mm), без БЖ
12	Memory	106,6	SDRAM 128 PC-133 Samsung
13	TV-tuner	182	TN/FM K-World VS-LTV7131RF Philips Chip (MPEG)+FM+w/Nicam & Stereo (9Bit)
14	Scanner	213,2	Сканер ScanExpress 1248UB
15	Printer	218,4	Lexmark Z735 (A4,4800*1200dpi – Black,4800*1200dpi – Color ,15/15ppm USB)
16	Video memory	223,6	VC ASUS ATI Radeon A9250/TD 128 MB 64bit Box with TV-out DVI-I AGP8x
17	Mother board	247	MB FOXCONN 865G7MF-SH-BOX (i865G, s775, FSB800MHz, 2DualDDR, VC, AGP8x, 3PCI, 2xATA, 2xSATA, SB6Ch, 4xUSB2.0, LAN) mATX
18	Hard disk drive HDD	254,8	HITACHI 80Gb 2M cahce 7200 ATA-6 (UATA133)
19	Processor	327,6	AMD Sempron CN 3200+ (FSB1600, 256kb, Manila, sAM2) box
20	Monitor	1014	17" MIRAI DML-517N LCD 8ms 300cd/m2 ,400:1 ,silver-black.

Висновки. Запропонований алгоритм є корисним для електронного бізнесу, для моделювання бізнес-процесів, пов’язаних з ціновими кластерами, для прогнозування витрат або прибутку. Економічний ефект полягає у автоматизації рутинних робіт з перебору великої кількості варіантів задач, швидкості пошуку кластерів.

1. Федорчук Є. Проектування оптимальної за вартістю конфігурації комп’ютера на основі системи Excel // Вісн. Держ. ун-ту “Львівська політехніка”.– 2000. – № 392. – С. 3–6. 2. Федорчук Є.Н., Зарубій Н. Побудова цінових кластерів на основі оптимізаційних критеріїв для товарних баз даних // Матеріали 2-ї Міжнар. наук.-практ.ї конф. “ Науковий потенціал світу – 2005”. – 19–30 вересня 2005.– Т. 10. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. – С. 50–51.

УДК 004.852, 004.942

П.О. Кравець
Національнийуніверситет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж

ІГРОВА ЗАДАЧА ПОБУДОВИ СТОХАСТИЧНО-ОРТОНОРМОВАНИХ СИСТЕМ

Сформульовано задачу побудови стохастично-ортонормованих систем. Запропоновано ігровий метод та розроблено алгоритм розв’язування задачі. Досліджено вплив параметрів задачі на збіжність ігрового методу.

The task of stochastic orthonormal system construction is formulated. The game method and algorithm of a task solution are developed. The influence of a task parameters on a game method convergence is investigated.

Вступ. У системах автоматизованого проектування, опрацювання і передачі сигналів, стиснення даних, оптимального керування існує необхідність побудови числових ортогональних або ортонормованих систем [1].

Послідовність векторів $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ евклідового векторного простору утворюють квадратну ортонормовану систему порядку m, якщо для довільних $i, j = 1,2,..., m$ виконується умова:

$$\left\langle X_i, X_j \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & if \quad i \neq j, \\ 1, & if \quad i = j, \end{cases}$$

де $X_i = (x^{ij} \mid j = \overline{1,m}) \in R^m$, $x^{ij} \in R^1$, $\left| x^{ij} \right| \leq 1$, $\langle *,* \rangle$ – скалярний добуток двох векторів.

Ортонормовані вектори визначені у заданому ортонормованому базисі, який можна отримати з довільного базису евклідового векторного простору скінченної розмірності методом ортогоналізації Грама – Шмідта [2].

У практичних застосуваннях, пов’язаних із опрацюванням сигналів, необхідно враховувати випадковий характер проходження процесів. Тоді замість детермінованої розглядається варіант стохастично-ортонормованої системи, для якої виконується умова

$$M\left\{\left\langle X_i, X_j \right\rangle\right\} = \delta_{ij}, \tag{1}$$

де $\{X_i\}$ – система незалежних стаціонарних випадкових величин, M – символ математичного сподівання.

Проблема побудови стохастично-ортонормованих систем є складною і на сьогодні недостатньо висвітленою у літературних джерелах. Знаходження послідовності векторів $\{M\{X_i\} \mid i = \overline{1,m}\}$, які задовольняють умову (1), можна виконати за допомогою пошукових методів [3]. Для зменшення кількості пошукових кроків такі методи повинні допускати розпаралелювання дій і адаптацію до невизначеностей даних [3, 4].

Пошукова задача (1) дозволяє формулювання у вигляді стохастичної гри [5], якщо елементи векторів $X_i = (x^{ij} \mid j = \overline{1,m})$, $i = \overline{1,m}$ розглядати як реалізації чистих стратегій гравців. Стохастична гра має потрібні для розв’язування задачі (1) властивості. Гравці здійснюють незалежний, суміщений у часі пошук оптимальних стратегій та адаптуються до пошукового середовища завдяки механізму самонавчання [6, 7].

Метою цієї роботи є розв’язування задачі побудови стохастично-ортонормованої числової системи за допомогою одного із адаптивних ігрових методів.

Адаптивний ігровий метод. Задачу (1) розв’язуємо за допомогою керованих випадкових процесів x^{ij}, які набувають дискретних значень на відрізках $[-1,1]$ в результаті незалежного вибору колективом гравців. Для цього розділимо кожен з відрізків на $N \geq 2$ рівних частин завдовжки $h = 2/N$.

Нехай вибір однієї з $N+1$ чистих стратегій

$$x_n^{ij}(k) = -1 + k * h, \tag{2}$$

де $k = \overline{0,N}$, здійснюється гравцем (i,j) в моменти часу $n = 1,2,...$ з імовірностями

$$p_n^{ij} = \left(p_n^{ij}(k) \mid k = \overline{0,N}; \sum_{k=0}^{N} p_n^{ij}(k) = 1 \right).$$

Тоді похибка реалізації поточного вибору гравця (i,j) визначається втратами:

$$\xi_n^{ij} = m^{-1} \sum_{r=1}^{m} \left| \left\langle X_i, X_r \right\rangle - \delta_{ir} \right| \qquad i, j = 1,2,..., m. \tag{3}$$

Якість гри визначається функціями середніх поточних втрат гравців:

$$\Phi_n^{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \xi_n^{ij} .$$

Для виконання умови (1) послідовності випадкових величин x_n^{ij} повинні забезпечувати мінімізацію функцій середніх втрат у часі:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Phi_n^{ij} \xrightarrow{p} \min;\ i, j = \overline{1, m}\,.$$

Генерування послідовностей x_n^{ij} з потрібними властивостями виконаємо на основі адаптивних рекурентних методів [8]:

$$p_{n+1}^{ij} = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N+1}\left\{p_n^{ij} - \gamma_n R(p_n^{ij}, x_n^{ij}, \xi_n^{ij})\right\},$$

де $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N+1}$ – проектор на $(N+1)$-мірний одиничний ε-симплекс [9], $R()$– крок методу, γ_n– параметр, що регулює величину кроку у часі. Середнє значення вектора $R()$ повинно забезпечувати умову псевдоградієнтності вектора p_n^{ij} з напрямком на точку оптимального розв'язку $p^{(ij)*}$.

На основі методу стохастичної апроксимації [10] умови доповняльної нежорсткості [11], отримаємо такий рекурентний метод:

$$p_{n+1}^{ij} = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N+1}\left\{p_n^{ij} - \gamma_n \xi_n^{ij}\left[e(x_n^{ij}) - p_n^{ij}\right]\right\}, \tag{4}$$

де $e(x_n^{ij})$ – одиничний вектор-індикатор вибору поточного значення дискретного випадкового процесу x_n^{ij}.

Метод (4) забезпечує розв'язування задачі побудови ортонормованих систем за рахунок самонавчання векторів змішаних стратегій.

Збіжність методу (4) забезпечується накладанням обмежень на швидкість зміни керованих параметрів [9, 12]

$$\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha},\ \varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}, \tag{5}$$

де $\gamma_0, \alpha, \beta > 0, \varepsilon_0 \in (0, (N+1)^{-1})$. Якщо $\alpha \in (0,1]$ та $\beta > 0$, то існує середньоквадратична збіжність методу до вирівнювальних стратегій, які є підмножиною рівноважних за Нешем розв'язків стохастичної гри [13].

Ігровий алгоритм. *Крок 1.* Ініціалізація методу. Задати кількість гравців m*m, початкові значення параметрів ігрового методу $\gamma_0; \alpha; \varepsilon_0; \beta$ та початкові значення векторів змішаних стратегій $p_0^{ij}(k) = (N+1)^{-1}$; $k = \overline{0, N}$. Задати момент часу $n = 1$.

Крок 2. Вибір чистих стратегій гравців та визначення значень випадкових процесів x^{ij}. Для кожного гравця (i, j) згенерувати випадкове число ω, розподілене за рівномірним законом в інтервалі [0, 1], та визначити номер k чистої стратегії з виконання умови

$$k = \left(K \,\middle|\, \min_K \sum_{k=0}^{K} p_n^{ij}(k) > \omega\right),\ K = \overline{0, N}\,.$$

За номером чистої стратегії визначити значення випадкових процесів x^{ij} згідно з (2).

Крок 3. Визначення поточних втрат гравців. Поточні втрати визначаються згідно з (3).

Крок 4. Зміна регульованих параметрів алгоритму. Обчислити значення параметрів γ_n та ε_n у момент часу n згідно з (5).

Крок 5. Перерахунок векторів змішаних стратегій. Обчислення нових векторів змішаних стратегій здійснюється за рекурентним перетворенням (4) з застосуванням проектора на одиничний ε-симплекс [9].

Крок 6. Перевірка умови завершення гри. Момент закінчення гри визначається виконанням умови

$$\overline{\varPhi_n} = m^{-2} \sum_{i,j=1}^{m} \varPhi_n^{ij} < \varepsilon ,$$

де $\varepsilon > 0$ – точність розв'язку, або при досягненні заданої кількості кроків $n = n_{out}$.

Якщо умова не виконана, то задати $n = n+1$ і перейти на крок 2, інакше – на крок 7.

Крок 7. Виведення значень математичних сподівань випадкових процесів x_n^{ij}.

Результати ігрового моделювання. Результати моделювання отримано на основі програмної реалізації ігрового методу (4) для побудови ортонормованих числових систем. Дані отримано для таких параметрів ігрового методу: $\gamma_0 = 1$; $\alpha = 0.1$; $\varepsilon_0 = 0.999(N+1)^{-1}$; $\beta = 2$, $N = m$.

Метод (4) забезпечує знаходження множини можливих розв'язків задачі побудови ортонормованих систем при різних ініціалізаціях генератора випадкових величин. Один із варіантів побудованої ігровим методом ортонормованої системи має вигляд:

$$0.5 * \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Похибка отриманого розв'язку визначається регульованими параметрами ігрового методу, зокрема, величиною кроку дискретизації випадкових процесів x^{ij}.

На рис. 1 зображено графіки залежностей усереднених у часі і по гравцях поточних втрат $f_n = \overline{\varPhi_n}$ та норми векторів змішаних стратегій $f_n = n^{-1} m^{-2} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} \left\| p_t^{ij} \right\|^{1/2}$.

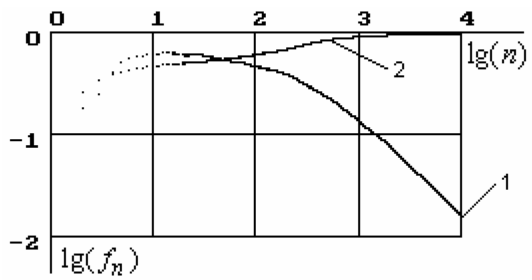

Рис. 1. Ілюстрація збіжності ігрового методу

Зменшення функції середніх втрат (графік 1) та стабілізація норми (графік 2) свідчать про збіжність векторів змішаних стратегій до фіксованих значень, які забезпечують розв'язування сформульованої задачі. Швидкість збіжності залежить від значень параметрів ігрового методу та розмірності задачі.

Збіжність ігрового методу забезпечується накладанням обмежень на параметри α та β. Існує оптимальне співвідношення цих параметрів, яке забезпечує розв'язування задачі за мінімальний час.

Параметр $0 < \alpha \le 1$ визначає величину кроку ігрового методу. При наближенні значення α до 1 зменшується значення параметра γ_n, що призводить до зменшення поточного приросту векторів змішаних стратегій. У результаті стабілізація векторів змішаних стратегій (4) відбудеться за меншу кількість пошукових кроків. Для великих значень параметра α робота методу може бути зупинена ще до досягнення розв'язку задачі. При зменшенні параметра α поточні прирости векторів змішаних стратегій у межах одиничного симплексу можуть бути надто великими. У результаті для досягнення розв'язку задачі із потрібною точністю буде необхідна велика кількість пошукових кроків.

Графіки залежностей усереднених у часі та по гравцях поточних втрат $\overline{\Phi_n}$ від параметра α, який регулює величину кроку методу (4), зображено на рис. 2. Графік 1 отримано для значення $\alpha = 0.1$, графік 2 – для $\alpha = 0.05$ і графік 3 – для $\alpha = 0.5$.

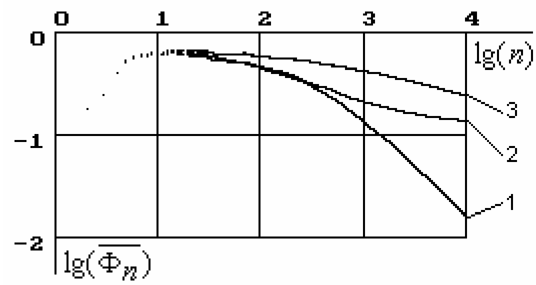

Рис. 2. Залежність функції поточних втрат від параметра α

З результатів експерименту видно, що існує оптимальне значення параметра $\alpha \approx 0.1$, яке забезпечує найбільшу швидкість збіжності досліджуваного ігрового методу. При зменшенні або збільшенні значення цього параметра швидкість збіжності ігрового методу зменшується.

Параметр $\beta > 0$ використовується у процедурі проектування модифікованого вектора змішаних стратегій на одиничний ε-симплекс. Із збільшенням значення цього параметра зростає швидкість розширення ε-симплекса до граничного одиничного симплекса. Якщо крок розширення ε-симплекса перевищує величину кроку ігрового методу, то в загальному випадку проектування векторів змішаних стратегій відбуватиметься у внутрішню область ε-симплекса. У результаті розширення ε-симплекса не призведе до обмеження величини кроку ігрового методу. За малих значень β та α проектування векторів змішаних стратегій буде відбуватися на межу ε-симплекса. У результаті повільне розширення ε-симплекса може призвести до обмеження величини кроку ігрового методу.

На рис. 3 зображено графіки залежності функції середніх втрат $\overline{\Phi_n}$ від параметра β. Графік 1 отримано для значення $\beta = 0.1$, графік 2 – для $\beta = 0.5$, графік 3 – для $\beta = 1$, графік 4 – для $\beta = 2$ і графік 5 – для $\beta = 3$.

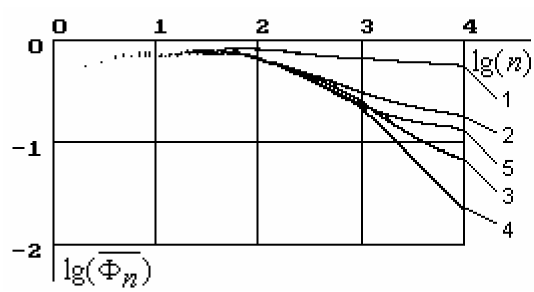

Рис. 3. Залежність функції поточних втрат від параметра β

З отриманих результатів (графіки 1–4) видно, що із зростанням параметра β збільшується швидкість збіжності ігрового методу. Існує оптимальне значення параметра $\beta \approx 2$, для якого швидкість збіжності є найбільшою. Подальше зростання параметра β призводить до зменшення швидкості збіжності ігрового методу (графік 5).

Розмірність ігрової задачі, яка визначається кількістю гравців та кількістю їхніх чистих стратегій, теж є одним із факторів збіжності ігрового методу. На рис. 4 зображено графіки залежностей функції поточних втрат $\overline{\Phi_n}$ від кількості гравців $m * m$. Графік з номером k отримано для $m = 2^k$.

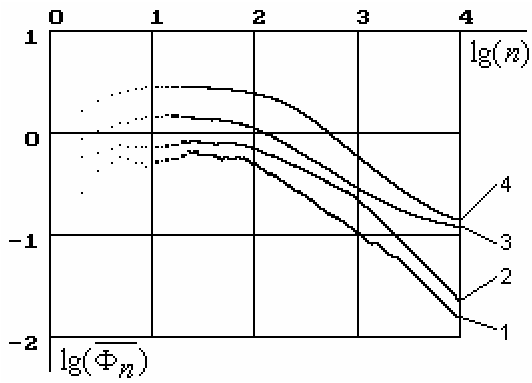

Рис. 4. Залежність функції поточних втрат від кількості гравців

Із зростанням розмірності задачі зростає кількість пошукових варіантів. Як видно з рис. 4, це призводить до зменшення швидкості збіжності ігрового методу.

Висновки. 1. Запропоновано адаптивний ігровий метод розв'язування задачі побудови стохастично-ортонормованих систем. В основу методу покладено незалежний децентралізований пошук варіантів розв'язків та самонавчання векторів змішаних стратегій.

2. Точність розв'язування задачі в основному визначається величиною кроку дискретизації пошукових інтервалів. Зменшення величини кроку призводить до підвищення точності розв'язків.

3. Встановлено, що швидкість збіжності ігрового методу залежить від значень його регульованих параметрів та від розмірності ігрової задачі. У роботі визначено оптимальні значення параметрів ігрового методу, які забезпечують найбільшу швидкість розв'язування пошукової задачі.

4. Децентралізоване формування ортонормованих векторів дає змогу виконати розпаралелювання ігрового алгоритму, що при відповідній програмно-апаратній підтримці призведе до зменшення часу розв'язування задачі.

1. Eugen J. Ionascu, David R. Larson, and Carl M. Pearcy. On the Unitary Systems Affiliated with Orthonormal Wavelet Theory in n-Dimensions // Journal of functional analysis. Academic Press. – 1998. – № 157. – P. 413–431. 2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. 3. Растригин Л.А., Рипа К.К., Тарасенко Г.С. Адаптация случайного поиска. – Рига: Зинатне, 1973. 4. Срагович В.Г. Адаптивное управление. – М.: Наука, 1981. 5. Доманский В.К. Стохастические игры // Математические вопросы кибернетики. – 1988. – № 1. – С. 26–49. 6. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. – М.: Наука, 1970. 7. Fudenberg D., Levine D.K. The Theory of Learning in Games. MIT Press, 1998. 8. Цыпкин Я.З., Позняк А.С. Рекуррентные алгоритмы оптимизации в условиях неопределенности // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. – 1989. – Т. 16. – С. 3–70. 9. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов: Рекуррентные алгоритмы. – М.: Наука, 1986. 10. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. – М.: Мир, 1972. 11. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. 12. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая оптимизация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. 13. Кравець П.О. Ігрова задача взаємодії елементів мультиагентних систем // Вісн. Нац. у-ту "Львівська політехніка". – 2006. – № 565. – С. 140–149.