Rev., Lett. 48. – 1982. – P. 1559–1562 p. 8. Buks E., Schuster R., Heiblum M., Umansky V. Nature 391. – 1998. – P. 871–874. 9. Natori K. JAP. – 1994. – 4879 p. 10. Datta S. IEDM Nechn. Dig. – 2002. 11. Yuan Taur, Tak Ning, Cambrige Univ. – 1998. 12. Jonson E. RCA Rev. 34. – 1973. – 80 p.

УДК 683.1

І.І. Дияк*, І.І. Макар*, Л.Б. Чирун
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж,
*Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра прикладної математики

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ СХЕМ ОБЧИСЛЕННЯ ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПІД ЧАС МОДЕЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ

Досліджено та апробовано декілька числових методів знаходження сингулярних і гіперсингулярних інтегралів. Наведено схеми числового інтегрування для обчислення подвійних сингулярних та гіперсингулярних інтегралів при числовій реалізації симетричного методу Гальоркіна розв’язання плоскої задачі теорії пружності.

Some schemes of numerical integration are investigated and tested. These schemes are the effective tool of the evaluation of singular and hypersingular integrals at numerical realization of the symmetric Galerkin boundary element method for the solution of 2D problem of the theory of elasticity.

Вступ. Поняття “гіперсингулярного інтегралу “ було визначено Ж. Адамаром майже сто років тому. Але лише в останні десятиліття у зв’язку з побудовою симетричних схем методів граничних елементів для числового розв’язання задач механіки, гідродинаміки розробленням ефективних числових методик обчислення таких інтегралів зацікавилися вчені багатьох країн світу. З використанням граничних гіперсингулярних інтегральних рівнянь можна отримати точніші результати у зонах концентрації напружень під час розв’язування задач теорії пружності, теорії пластичності, механіки руйнування, біомеханіки та ін [1, 4, 5, 7]. Важливі прикладні інженерні задачі аеродинаміки та електродинаміки [1] – це галузь застосування граничних сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Постановка проблеми у загальному вигляді. У моделюванні багатьох практично важливих задач механіки граничні гіперсингулярні інтегральні рівняння як складовий елемент теорії сингулярних інтегральних рівнянь становлять сучасний і поширений засіб дослідження. Надійність і ефективність числових алгоритмів значною мірою визначається якістю обчислення сингулярних інтегралів. Однак, питання щодо базових понять – визначення та способів обчислення (аналітичних або числових) гіперсингулярних інтегралів – залишається складним і є актуальною темою сучасних наукових досліджень.

Розглядається гіперсингулярний інтеграл вигляду:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}dt,\ \ a<x<b\,. \tag{1}$$

Такого інтеграла не існує ні в сенсі головного значення Коші, ні як невласного інтеграла першого роду. Наведемо два найпоширеніші способи визначення гіперсингулярного інтеграла:

Інтеграл (1) розглядається як похідна від інтеграла, збіжного в сенсі головного значення за Коші [6]:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}dt = -\frac{d}{dt}P.V.\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}dt\,;$$

Інтеграл (1) трактується як скінченна частина розбіжного інтеграла за Адамаром [5]:

$$F.P.\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right)\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^2} - \frac{2f(x)}{\varepsilon}\right], \qquad (2)$$

де $F.P.$ позначає скінченну частину інтеграла. Поняття скінченної частини вперше введено Ж. Адамаром у 1923 році.

У сучасній науковій літературі [2, 5, 7] зустрічаються різні визначення, які є рівносильними. Наприклад, означення за Куттом вимагає існування інтеграла також на кінці відрізку інтегрування, де інтеграл має сингулярність:

$$F.P.\int_{a=x}^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}dt = F.P.\int_0^{b-x}\frac{f(\eta+x)\,d\eta}{\eta^2} \equiv \int_0^{b-x}\frac{f(\eta+x)-f(x)-f^{'}(x)\eta}{\eta^2}d\eta$$
$$-\frac{f(x)}{b-x} + f^{'}(x)\,Ln(b-x).$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомі декілька способів знаходження інтеграла (1). Деякі з них аналітичні, інші ґрунтуються на концепції скінченної частини розбіжного інтеграла і використовують числові методи.

Метод дискретних особливостей, який широко застосовується під час моделювання задач аеродинаміки, запропоновано у роботах С.М. Бєлоцерковського. Шуканий клас розв’язку виділяється тут за рахунок вибору взаємного розміщення двох сіток – дискретних особливостей(вихорів) та розрахункових вузлів [1]. Потім використовуються інтерполяційні квадратурні формули Ньютона – Котеса. Інтегральні суми, якими заміняються сингулярні інтеграли, повинні існувати в сенсі головного значення за Коші чи скінченної частини за Адамаром. Для цього внутрішні розрахункові точки розташовують посередині між двома точками дискретних особливостей. У книзі [1] математично обґрунтувано метод дискретних особливостей, а також досліджено його стійкість.

Автори роботи [6] побудували квадратури, які ґрунтуються на визначенні гіперсингулярного інтеграла як похідної від інтеграла, збіжного в сенсі головного значення за Коші та використанні відомої формули Гаусса для сингулярних інтегралів. Одним із недоліків цього підходу є необхідність обчислення похідної від підінтегральної функції, що не є проблематичним при складному її аналітичному виразі.

Відомі способи наближеня гіперсингулярних інтегралів шляхом побудови деякого конформного відображення у підінтегральному виразі на всю дійсну вісь і подальшого інтегрування “звичайними” квадратурами [2, 9]. Ці формули збігаються із експоненційною швидкістю і ефективні при обчисленні інтегралів на безмежних інтервалах.

Не вирішені раніше частини загальної проблеми. У праці [4] для знаходження гіперсингулярних інтегралів запропоновано ефективні схеми, які поєднують використання ряду числових та аналітичних методів. Останній підхід характеризується високою точністю, універсальністю, може використовуватись для розв’язування слабосингулярних, сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь як методом колокацій, так і методом Бубнова – Гальоркіна. Ці схеми є придатними для побудови $p-$ та *hp*-адаптивних версій методів граничних елементів, тобто у тих випадках, коли підінтегральна функція є різних порядків для різних елементів матриці системи лінійних рівнянь.

Цілі (завдання) статті. У цьому дослідженні апробовано декілька методів числового інтегрування та проведено їх порівняльний аналіз. Наведено результати обчислень гіперсингулярних інтегралів з використанням чисельно-аналітичних схем інтегрування.

Основний матеріал дослідження. ***Обчислення гіперсингулярних інтегралів за формулами множення (Product Rules) [4].*** Розглянемо інтеграл вигляду:

$$\int_a^b w(x)\,f(x)\,K(y,x)\,dx\ , \qquad (3)$$

де функція $f(x)$ задовольняє певні вимоги щодо гладкості. Основна ідея методу інтегрування за формулами множення полягає в аналітичному інтегруванні сингулярності, яка зосереджена у ядрі $K(y,x)$. Нехай $\pi_k(\cdot)$, $k=0,1...$ – ортогональні поліноми на інтервалі (a,b) з ваговою функцією $w(x)$. Позначимо через λ_ν та τ_ν ($\nu=1...n$) вагові коефіцієнти та вузли класичної формули Гаусса n-го порядку. Інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $f(x)$, побудований на нулях полінома $\pi_n(x)$, матиме вигляд:

$$L_n(f;x)=\sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)\,l_\nu(x),\text{ де } l_\nu=\pi_n(x)/((x-\tau_\nu)\,\pi_n^{'}(\tau_\nu)),\ \nu=1...n.$$

Розклавши його в ряд за ортогональними поліномами $\{\pi_\nu\}$, одержимо:

$$L_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\,\pi_\nu(x),$$

де $a_\nu=\dfrac{1}{\|\pi_\nu\|^2}\left(L_n(f;\cdot),\pi_\nu\right)=\dfrac{1}{\|\pi_\nu\|^2}\int_a^b w(x)\,L_n(f;x)\,\pi_\nu(x)\,dx$, $\nu=0,1,...,n-1$.

Для обчислення інтеграла в останньому виразі можемо застосувати формулу Гаусса, оскільки степінь $L_n(f;x)\,\pi_\nu(x)$ не більший за $2n-2$. Врахувавши також, що $L_n(f;\tau_k)=f(\tau_k)$ для всіх $k=1...n$, одержимо: $a_\nu=\dfrac{1}{\|\pi_\nu\|^2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\, f(\tau_k)\,\pi(\tau_k)$.

Тепер формулу множення отримуємо шляхом заміни функції $f(x)$ її інтерполяційним поліномом $L_n(f;x)$ в інтегралі (3) :

$$\int_a^b w(x)\,f(x)\,K(y,x)\,dx=Q_n(f;x)+R_n^{PR}(f;y),$$

де

$$Q_n(f;x)=\int_a^b w(x)\,L_n(f;x)\,K(y,x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\int_a^b w(x)\,\pi_\nu(x)\,K(y,x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, b_\nu(y)$$

$R_n^{PR}(f;y)$ – залишок квадратурної формули множення. Величини $b_\nu(y)=\int_a^b w(x)\,\pi_\nu(x)\,K(y,x)\,dx$ часто називають модифікованими моментами ядра $K(y,x)$.

Нижче розглянемо детальніше спосіб побудови формул множення із використанням множини поліномів Лежандра $\{P_i(x)\}$, які ортогональні на інтервалі $(-1,1)$ з ваговою функцією $w(x)=1$. Формули матимуть вигляд:

$$\int_{-1}^{1} K(y,x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} w_k(y)\,f(x_k)+R_n^{PR}(f,y)\ . \tag{4}$$

Зауважимо, що формула (4) є точною, якщо $f(x)$ є поліномом степеня, меншого за n. Вагові функції w_k обчислюють за таким виразом [6]:

$$w_k(y)=\frac{1}{2}\lambda_k\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)\mu_j(y)P_i(x_k), \tag{5}$$

де $\{\lambda_k,x_k\}$ – вагові коефіцієнти(числа Крістофеля) та вузли формули Гаусса – Лежандра порядку n: $\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$; $P_i(x)$ – поліном Лежандра степеня i; $\mu_j(y)$ – модифіковані моменти ядра $K(y,x)$:

$$\mu_j(y) = \int_{-1}^{1} K(x,y) P_j(x) dx \qquad (6)$$

Вирази для інтегралів (6) знаходяться на основі рекурентних співвідношень між поліномами Лежандра. Наведемо результати обчислення модифікованих моментів для деяких ядер. (Символьні перетворення виконувались у пакеті Mathematica 4.2.)

Відомі співвідношення між поліномами Лежандра [4]:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_{j+1}(x) = \alpha_j^{(0)} x P_j(x) - \beta_j^{(0)} P_{j-1}(x), \ j \ge 1, \end{cases}$$

де $\alpha_j^{(0)} = \dfrac{2j+1}{j+1}$, $\beta_j^{(0)} = \dfrac{j}{j+1}$.

Якщо $K(y,x) = Ln(|x-y|)$ − ядро з логарифмічною особливістю, то для обчислення модифікованих моментів пропонується така процедура :

$$\begin{cases} \mu_0(y) = (1+y)\ln(1+y) + (1-y)\ln(1-y) - 2, \\ \mu_j(y) = \dfrac{1}{2j} Q_{j-1}^{(1,1)}(y), j \ge 1. \end{cases}$$

тут $Q_j^{(1,1)}$ − функції Якобі другого роду:

$$\begin{cases} Q_0^{(1,1)}(y) = (1-y^2)\ln\dfrac{1-y}{1+y} - 2y, \\ Q_1^{(1,1)}(y) = 2y Q_0^{(1,1)}(y) + \dfrac{8}{3}, \\ Q_j^{(1,1)} = \dfrac{j+1}{j(j+2)}\Big[(2j+1) y Q_{j-1}^{(1,1)}(y) - j Q_{j-2}^{(1,1)}(y)\Big], j \ge 2. \end{cases}$$

Якщо ядро $K(x,y)$ − це дробово-раціональні функції, які у чисельнику містять множники виду $(x - a_y)$, а в знаменнику − множники виду $(x - a_y)$ та $(x-a_y)^2 + b_y^2$, то модифіковані моменти обчислюються за таким алгоритмом [4].

Нехай нам відомі величини

$$m_j = \int_{-1}^{1} K(y,x) p_j(x) dx, \qquad (7)$$

які будемо називати стартовими моментами. Тут $p_j(x)$ − ортогональні поліноми, які у загальному випадкові задовольняють співвідношення:

$$\begin{cases} p_0(x) = 1, \\ p_1(x) = k_1^{(1)} x + k_0^1, \\ p_{j+1}(x) = \alpha_j x p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x), j \ge 1. \end{cases} \qquad (8)$$

Наприклад, стартовими моментами (7) можна вважати модифіковані моменти ядра $K(y,x) \equiv 1$. Нижче подано результати для довільної множини ортогональних поліномів, які задаються співвідношеннями (8). Зокрема, це може бути множина поліномів Лежандра (при $k_1^{(1)} = 1,\ k_0^{(1)} = 0$). Знаючи стартові моменти деякого “стартового” ядра $K(y,x)$, обчислимо модифіковані моменти ядра $\overline{K}(y,x)$:

$$\overline{K}(y,x) = K(y,x)(x - a_y)$$

$$\overline{K}(y,x)=\frac{K(y,x)}{(x-a_y)},\ a_y\neq\pm1$$

$$\overline{K}(y,x)=\frac{K(y,x)}{(x-a_y)^2+b_y^2},\ b_y\neq 0$$

Отримаємо відповідно:

$$\begin{cases}\overline{m}_0(y)=\dfrac{1}{k_1^{(1)}}m_1(y)-\left(\dfrac{k_0^{(1)}}{k_1^{(1)}}+a_y\right)m_0(y),\\ \overline{m}_j(y)=\dfrac{1}{\alpha_j}m_{j+1}(y)-a_ym_j(y)+\dfrac{\beta_j}{\alpha_j}m_{j-1}(y),\ j\geq 1.\end{cases}$$

$\overline{m}_j(y)=q_j(a_y)$, де
$$\begin{cases}q_0(z)=\int_{-1}^{1}\dfrac{K(y,x)}{x-z}dx,\\ q_1(z)=p_1(z)q_0(z)+k_1^{(1)}m_0(y),\\ q_{j+1}(z)=\alpha_jzq_j(z)-\beta_jq_{j-1}(z)+\alpha_jm_j(y),\ j\geq 1.\end{cases}$$

Зауважимо, що при $z\in(-1,\,1)$ інтеграл для визначення $q_0(z)$ збіжний в сенсі головного значення Коші.

$$\begin{cases}\overline{m_0},\ \overline{m_1}-\text{безпосереднє інтегрування},\\ \overline{m_2}(y)=\alpha_0\alpha_1(m_0(y)+a_y\overline{m_1}(y))-[\alpha_0\alpha_1(a_y^2+b_y^2)+\beta_1]\overline{m_0}(y),\\ \overline{m_j}(y)=\dfrac{q_j^I(a_y+ib_y)}{b_y},\ \ j\geq 3.\end{cases}$$

$$q_0^R(z_y)=\frac{1}{\alpha_0}\overline{m}_1(y)-a_y\overline{m}_0(y)$$

$$q_0^I(z_y)=b_y\overline{m}_0(y)$$

$$q_1^R(z_y)=\frac{1}{\alpha_1}\overline{m}_2(y)-a_y\overline{m}_1(y)+\frac{\beta_1}{\alpha_1}m_0(y)$$

$$q_1^I(z_y)=b_y\overline{m}_1(y)$$

$$\begin{aligned}q_{j+1}^R(z_y)&=\alpha_ja_yq_j^R(z_y)-\alpha_jb_yq_j^I(z_y)-\beta_jq_{j-1}^R(z_y)+\alpha_im_j(y)\\ q_{j+1}^I(z_y)&=\alpha_ja_yq_j^I(z_y)+\alpha_jb_yq_j^R(z_y)-\beta_jq_{j-1}^I(z_y),\ j\geq 1\end{aligned}.$$

Вважаючи знайдені на цьому кроці моменти ядра $\overline{K}(y,x)$ стартовими, можемо знову проводити обчислення модифікованих моментів, утворивши ядро бажаного вигляду. Тобто $K(y,x):=\overline{K}(y,x)$, $m_j(y):=\overline{m_j}(y)$.

Порядок збіжності інтегралів, які обчислені за формулою множення, визначається за теоремою, сформульованою у роботі [4]:

Теорема 1. Нехай $f\in C^p[-1,1]$ і $f^{(p)}\in H_\mu[-1,1],\ 0<\mu\leq 1$. Тоді, якщо $\int_{-1}^{1}|K(y,x)|^2\,dx\leq C$ для всіх $y\in[-1,1]$, то $R_n^{PR}(f,y)=O(n^{-p-\mu}),\forall\, y\in[-1,1]$.

DE-формула для ітегрування функцій із слабкою особливістю [8]. За допомогою деякого перетворення $x = \varphi(u)$ відрізок інтегрування відображається на дійсну вісь. При цьому функція f має бути аналітичною та експоненційно прямувати до нуля при $u \to \pm\infty$, щоби досягти асимптотичного порядку збіжності $O(\exp(-C\,N^{1/2}))$. У багатьох роботах використовуються функції Віттакера для апроксимації підінтегральної функції на $(-\infty, +\infty)$, а потім застосовують інтегрування „звичайними" квадратурами[2]. Підходи, що грунтуються на такій ідеї, називають SINC-методами. DE-формули нами використовуються у випадкові обчислення зовнішнього інтеграла у подвійному інтегралі за методом Гальоркіна, коли підінтегральна функція має логарифмічну особливість на кінці відрізка інтегрування:

$$\int_0^1 f(t)dt = h\sum_{k=-N}^{N} w_k f(t_k) + R_N^{DE}\,, \tag{9}$$

де $t_k = \dfrac{1}{2}\left[1 + \tanh(\dfrac{\pi}{2}\sinh(kh))\right], w_k = \dfrac{(\pi/4)\cosh(kh)}{\cosh^2((\pi/2)\sinh(kh))}$.

Параметри N та h вибираються на основі деяких рекомендацій. Для досягнення точності до сьомого знаку після коми пропонується вибрати $N = 8$, $h = 0.3$.

Теорема 2 [4]. Якщо $f(t)$ є аналітичною функцією на $(0,1)$ і має слабку сингулярність на кінцях інтервалу, то $R_N^{DE} = O(e^{-c(N/\ln N)}),\ N \to \infty$

Формула типу Гаусса для гіперсингулярних інтегралів 2-го порядку. Врахувавши, що $F.P.\int_a^b \dfrac{f(x)}{(x-t)^2}dx = \dfrac{d}{dt}P.V.\int_a^b \dfrac{f(x)}{(x-t)}dx$ та, використавши відоме розвинення Гаусса для інтеграла, що збіжний в сенсі головного значення за Коші, у [6] запропоновано формулу:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(x-t)^2}dx \cong -\frac{2f'(t)}{P_n(t)}Q_n(t) - \frac{2f(t)(1-t^2)^{-1}}{P_n(t)^2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \frac{f(t_k)}{(x_k - t)^2} \tag{10}$$

де P_n, Q_n – функції Лежандра 1-го та 2-го роду відповідно.

Формула Адамара. Використовується для обчислення інтегралів вигляду

$$\int_0^1 \frac{f(s)}{s}ds \approx w_0 f(0) + \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)\,. \tag{11}$$

Вона отримується шляхом заміни $f(x)$ інтерполяційним поліномом степені n з вузлами в точках $\{0, s_1, ..., s_n\}$ і є точною для поліномів степеня $\leq 2n$.

$$s_k = \frac{1+x_k}{2} \qquad w_k = \frac{\lambda_k}{2s_k},\ k = 1...n \qquad w_0 = -\sum_{k=1}^{n} w_k$$

Числові приклади. *Приклад 1.* У роботі [1] наведено точні значення сингулярного інтеграла вигляду:

$$H_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_0 - x}dx = \pi\, x_0\,, \quad x_0 \in (-1,1)\ .$$

При $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $H_1 = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57079633$.

У табл. 1 наведено результати обчислень цих інтегралів за правилом множення (4) та формулою (10).

Таблиця 1

Порівняння точності обчислення сингулярного інтеграла H_1 за правилом множення (4) та формулою типу Гаусса (10)

Правило множення (4)			Формула типу Гаусса (10)		
№ з/п	H_1	Абсолютна похибка	N	H_1	Абсолютна похибка
4	1,621	5,067E-02	3	1,560	1,045E-02
5	1,584	1,319E-02	4	1,566	5,267E-03
6	1,575	4,382E-03	5	1,568	3,004E-03
7	1,565	5,682E-03	6	1,569	1,863E-03
8	1,561	9,902E-03	7	1,569	1,439E-03
9	1,568	2,984E-03	8	1,569	1,689E-03
10	1,5735	2,731E-03	9	1,570	7,230E-04
12	1,571	4,304E-04	10	2,392	8,211E-01
24	1,571	2,521E-04	12	1,570	4,518E-04
32	1,571	6,988E-05	5	1,568	3,004E-03

У пакеті Mathematica 4.2 отримано наближення інтеграла H_1 лише за методом QuasiMonteCarlo (non-adaptive Halton-Hammersley-Wozniakowski algorithm) після виконання 50 000 ітерацій ($I \approx 1{,}570$). Як видно з наведених результатів, метод множення є ефективнішим.

Приклад 2. Наведемо результати обчислювальних експериментів для двох сингулярних інтегралів:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(s)}{s} ds \qquad\qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{s} ds\ .$$

У табл. 2 наведено результати обчислень інтегралів, заданих формулами I_1 та I_2. Зауважимо, що для обчислення цих інтегралів не можна застосовувати правило множення (4), оскільки особлива точка збігається з межею інтегрування. Як видно із таблиці, формула Адамара (11) та формула Кутта з роботи [6] дають майже однакові результати. Немає значних відхилень в отриманих значеннях.

Розглянемо приклади обчислення гіперсингулярних інтегралів, наведені у роботі [6], де використовувались формули типу Гаусса для гіперсингулярних інтегралів та метод Кутта. Ці значення зіставлені із результатами обчислень за формулою множення (4) із відповідним типом ядра.

$$I_3 = F.P.\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(x-t)^2} dx;\ \ f(x) = \sqrt{1-x^2}\cos(x),\quad t = 0$$

Таблиця 2

Порівняння результатів обчислення сингулярних інтегралів I_1 та I_2 за формулою Адамара (11) та формулою Кутта [6]

n	I_1		I_2	
	Формула Адамара(11)	Формула Кутта [6]	Правило Адамара(11)	Формула Кутта [6]
2	9,4604E-01	9,4553E-01	0E+00	0E00
3	9,4608E-01	9,4608E-01	1,6653E-16	2E-10
4	9,4608E-01	9,4608E-01	0E+00	3,0000E-11
5	9,4608E-01	9,4608E-01	5,5511E-17	-2E-10
6	9,4608E-01	9,4608E-01	-4,1633E-16	4,1900E-08
7	9,4608E-01	9,4608E-01	1,1102E-16	-5,2944E-08
8	9,4608E-01	9,4608E-01	2,4694E-17	-1,2813E-09

Таблиця 3

Результати обчислення гіперсингулярного інтеграла I_3 за формулою множення (4), формулою Кутта [6] та формулою типу Гаусса (10)

n	Формула множення (4)	Формула Кутта [6]	Формула типу Гаусса (10)
4	-3,75270	-3,90719	-3,90699
5	-3,89909	-3,90916	NA
6	-3,86527	-3,90997	-3,90945
7	-3,91390	-3,91033	NA
8	-3,93578	-3,91140	-3,91022

Тут $n-$ кількість вузлів Гаусса. Зазначимо, що при непарних n нуль є коренем поліномів Лежандра, що збігається із $t=0$, − тому при непарних n у формулі типу Гаусса виникатиме переповнення [6].

Як видно з наведених у останній таблиці результатів, у цьому випадкові краще застосувати формулу множення, яка будувалась би із використанням поліномів Гаусса – Чебишова, що є ортогональними із ваговою функцією $\sqrt{1-x^2}$. Наступний приклад демонструє кращу узгодженість між значеннями I_3 при іншій функції $f(x)$.

$$I_4 = F.P.\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{(x-t)^2}dx;\; f(x)=e^x\,Cos(x)\;,\;\; t=0\,.$$

Таблиця 4

Результати обчислення гіперсингулярного інтеграла I_4 за формулою множення (4), формулою Кутта [6], формулою типу Гаусса (10) та методом дискретних особливостей [1]

n	Формула множення (4)	Формула Кутта [6]	Формула типу Гаусса (10)	nd*	Метод дискретних особливостей [1]
4	-2.31386	-2.11100	-2.11100	3	-2,13162
5	-2.11106	-2.11100	NA	9	-2,11369
6	-2.11124	-2.11102	-2.11100	13	-2,11230
7	-2,11098	-2.11100	NA	19	2,11161
8	-2,11094	-2.11187	-2.11100	25	2,111353

* nd – кількість дискретних вихорів (особливостей).

Для обчислення інтеграла I_4 у останньому стовбці табл. 4 наведено результати використання квадратурно-різницевої формули [1]:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_{0j})^2}dt \approx \sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{f(t)}{(t-t_{0j})^2}dt \approx \sum_{k=0}^{n} f(t_{0_k})\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{(t-t_{0j})^2} == \sum_{k=0}^{n} f(t_{0_k})\left[\frac{1}{t_k-t_{0j}}-\frac{1}{t_{k+1}-t_{0j}}\right], \quad (12)$$

де множини $E=\{t_k,\, k=1...n\}$ і $E_0=\{t_{ok}, 0,1,...n\}$ утворюють канонічне розбиття відрізку $[a,b]$. При цьому точки t_i розбивають відрізок $[a,b]$ на $n+1$ частини довжиною $h=(b-a)/(n+1)$, а точка t_{0j} (вихор) є серединою відрізка $[t_j, t_{j+1}]$, $j=0,1,...,n;\; t_0=a,\, t_n=b.$

Приклад 3. Обчислимо наступний гіперсингулярний інтеграл за формулою множення і порівняємо результати з аналітичним значенням та значеннями, отриманими за SINC-квадратурами, що наведено у праці [3].

$$I_5=\int_0^1\frac{Cos(t)}{(t-x)^2}dt.\;\; \text{При}\, x=0.5\;\; I_5\approx -3.9460895541\;.$$

Таблиця 5

Порівняння ефективності обчислення гіперсингулярного інтеграла I_5 за формулою множення (4), методом дискретних особливостей (12) та SINC-методом (9)

Формула множення (4)		SINC-метод (9)		Метод дискретних особливостей (12)	
n	Абсолютна похибка	N	Абсолютна похибка	*nd*	Абсолютна похибка
3	0,58E+00	20	0,83E+00	3	0,04932071
4	5,53E-03	40	0,21E+00	7	0,00907597
5	5,13E-06	80	0,25E+00	11	0,00367632
6	1,70E-05	160	9,56E-04	17	0,00153937
7	5,71E-09	320	7,91E-06	25	0,00071183
8	2,45E-08	640	7,30E-09	31	0,00046296

Приклад 4. Розглянемо обчислення гіперсингулярного інтеграла

$$I_6 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x + x^2}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(1+x)}\, dx = -Ln\, 2 \approx -0.69314718056...$$

Таблиця 6

Порівняння результатів обчислення гіперсингулярного інтеграла I_6 за формулою множення (4), методом дискретних особливостей (12) із значенням, отриманим з використанням пакета Mathematica 5.0.

Метод дискретних особливостей	Значення
N= 3	-0.685714
N= 12	-0.692661
N= 24	-0.693025
N= 48	-0.693117
N= 96	-0.693140
N=192	-0.693145
N=384	-0.693147
Правило множення	
N= 9	-0.697868
N= 10	-0.693177
N= 32	-0.693058
N= 80	-0.693147
Значення інтегралу, обчислене з використанням пакету Mathematica 5.0	-0.693147

У табл. 6 наведено результати використання двох числових підходів і значення, отримане з використанням пакета Mathematica 5.0, що у цьому випадкові дало змогу отримати результат.

Висновки. У роботі апробовано декілька методів обчислення гіперсингулярних інтегралів. Ефективність числових схем інтегрування, запропонованих авторами роботи [4] порівняно з іншими підходами. Числові методики інтегрування, застосовані нами для обчислення інтегралів, є потужним засобом розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь теорії пружності методом Гальоркіна, а також методом колокацій. Вони також можуть використовуватися для побудови різних $p-$ та $h-p$-адаптивних версій методу граничних елементів.

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с. 2. Вінтоняк Н., Хапко Р. Про використання SINC квадратур для наближеного обчислення інтегралів з різними типами особливостей // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2005. – С. 1–9. 3. Дияк І.І. Чисельне дослідження плоскої задачі теорії пружності методом граничних елементів // Мат. методи та фіз.-мех. Поля. – 1997. – 40. – № 3. –

С. 60–63. 4. Aimi A., Carini A., Diligenty M., Monegato G. Numerical Integration Schemes for Evaluation the (hyper)Singular Integrals In 2D BEM // Computational mechanics. – 1998. – Vol. 22. – P. 1–12. 5. Diligenty M., Monegato G. Finite-part integrals: their occurrence and computation // Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II. – 1993. – 33. – P. 39–61. 6. Hui Y., Shia D. Evaluations of Hypersingular Integrals Using Gaussian Quadrature // IJNME. – 1999. – Vol. 44. – P. 205–214. 7. Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A. On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // arXiv:math-ph/0301034 v1 26, Jan 2003. 8. Mori M. Quadrature formulas obtained by variable transformation and the DE-rule // J. Comput. Appl. Math. – 1985. – 12–13. – P. 119–130. 9. Philsu Kim, U. Choi , Two Trigonometric Quadratute Formulae for Evaluation Hypersingular Integrals // IJNME. – 2003. – Vol. 56. – P. 469–486.

УДК 004.652

А.Ю. Берко, В.А. Висоцька
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційних систем та мереж

АНАЛІЗ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ КОМЕРЦІЇ

Проаналізовано основні моделі систем електронної комерції. Запропоновано узагальнену модель таких систем. Інтернет-система електронної комерції розглядається як цілеспрямована множина об'єктів довільної природи з набором зв'язків між ними та між їхніми властивостями. Пропонується класифікація технологій систем електронної контент-комерції.

Some problems of electronic commerce are analyzed in proposed paper. Generalized model of such kind of systems are proposed. Internet-system of electronic commerce is considered as purposeful set of objects of the any nature with a set of connections between them and between their properties. Classification of technologies for electronic content-commerce systems has been proposed.

Вступ. Інтернет, будучи інструментом ведення бізнесу, істотно підвищує швидкість і динаміку взаємовідносин бізнес-партнерів у разі правильного використання цього інструменту. У міру поєднання "життя" реального підприємства з Web'ом проблема управління контентом (вмістом) Web-сайту стає все гострішою. За фасадом будь-якого Web-сайту знаходиться його інфраструктура та інформаційне наповнення, вдале управління яким є першочерговим завданням для досягнення ефективності [1].

Будь-який Web-сайт складається з набору сторінок, а відмінності полягають лише в тому, як вони організовані. Розрізняють два види організації Web-сайту: статичний і динамічний. У першому випадку фахівці, які відповідають за створення і підтримку сайту, пишуть у HTML-форматі кожну окрему сторінку, включно з її оформленням і контентом. У другому – основу будь-якої Web-сторінки становить шаблон, що визначає розміщення у вікні Web-браузера всіх компонентів сторінки і розміщення конкретної інформації з використанням стандартних засобів, що не вимагають від учасника процесу знання мови HTML і досить складних для нефахівця процедур публікації Web-сторінки [4].

Якщо сайт складається з великої кількості сторінок або він повинен часто оновлюватися (як це відбувається, наприклад, в Інтернет-магазині), то перевага динамічної організації стає очевидною. Розробникам Web-сайту немає необхідності переписувати сторінку в разі зміни її інформаційного наповнення або дизайну. Сторінки не зберігаються цілком, а формуються "на льоту" при зверненні до них. Відділення дизайну від контента є основною відмінністю динамічних