УДК 004.272.26

В.Я. Лісовець, Г.Г. Цегелик
Львівський національний університет ім. І. Франка,
кафедра математичного моделювання соціально-економічних процесів

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ ПІДХОДІВ ДО ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ ПОШУКУ ІНФОРМАЦІЇ У ФАЙЛАХ БАЗ ДАНИХ ДЛЯ БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ ЕОМ

Виконано порівняльний аналіз двох підходів до побудови оптимальних стратегій пошуку записів з використанням методу m-паралельного блочного пошуку у послідовних упорядкованих файлах баз даних, які зберігаються у зовнішній пам'яті багатопроцесорної ЕОМ, для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів. За критерій оптимальності взято математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису у файлі.

Ключові слова: багатопроцесорні системи, *m*-паралельний пошук, блочний пошук, бази даних.

The comparing effectiveness of the two variant of building the optimal search strategies is analyzed with using of the method of m-parallel block search in ordered files of database which stored in external memory of multiprocessor system for different probability distribution of record request frequency. The mathematical expectation of total time needed for search of a record in file is taken as a criterion of optimality.

Keywords: multiprocessor systems, m-parallel search, block search, database

Постановка проблеми

Завдяки високій надійності та продуктивності багатопроцесорні ЕОМ широко використовуються для підтримки й організації великих баз даних (БД). Під час розв'язування різноманітних задач із використанням БД основний акцент переноситься з процедур опрацювання інформації на процедури організації збереження та пошуку інформації в них. Тому продуктивність обчислювальних систем, орієнтованих на роботу з великими БД, великою мірою визначається ефективністю методів паралельного пошуку інформації в БД.

Дослідження ефективності методів пошуку інформації в базах даних є доволі складним завданням. Зазвичай за критерій ефективності береться середня кількість порівнянь, необхідних для пошуку запису. На практиці це теоретичне середнє досить часто відрізняється від реальної середньої кількості порівнянь. Насамперед це пов'язано з тим, що ймовірності звертання до записів у файлах баз даних підпорядковані нерівномірним законам розподілу: одні записи шукають досить часто, інші дуже рідко. У цій роботі припускаємо, що ми можемо визначити закон розподілу, за яким розподілені записи. Це ми можемо зробити, наприклад, маючи статистичну інформацію конкретної бази даних.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

У роботах [2–6] проаналізовано методи *m*-паралельного послідовного перегляду та двох варіантів методу *m*-паралельного блочного пошуку записів для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів, де за критерій ефективності взято математичне сподівання кількості паралельних порівнянь, необхідних для пошуку запису у файлі. Зауважимо, що побудова оптимальних стратегій пошуку інформації у послідовних файлах у разі використання методів послідовного перегляду і блочного пошуку записів для однопроцесорних ЕОМ та різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів розглянуті в [9]. А в [5] побудовано оптимальні стратегії пошуку записів у послідовних файлах, які зберігаються у зовнішній пам'яті багатопроцесорної ЕОМ, використовуючи метод *m*-паралельного послідовного перегляду.

Формування цілей статті

У цій роботі, застосовуючи метод m-паралельного блочного пошуку записів, розглянемо два підходи до побудови оптимальних стратегій пошуку записів у файлах, які зберігаються у зовнішній пам’яті багатопроцесорної ЕОМ.

Побудову оптимальних стратегій пошуку здійснимо для рівномірного закону розподілу ймовірностей звертання до записів і таких законів нерівномірного розподілу ймовірностей, як [1–8]:

- “бінарний” розподіл

$$p_i = \frac{1}{2^i},\ \ i = \overline{1, N-1},\ \ p_N = \frac{1}{2^{N-1}},$$

де p_i — ймовірність звертання до i-го запису, N – кількість записів у файлі;

- закон Зіпфа

$$p_i = \frac{1}{iH_N},\ \ i = \overline{1, N},$$

де $H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$;

- узагальнений закон розподілу

$$p_i = \frac{1}{i^c H_N^{(c)}},\ \ i = \overline{1, N},$$

де c $(0 < c < 1)$ — будь-який параметр і $H_N^{(c)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^c}$.

Виклад основного матеріалу

Нехай послідовний упорядкований файл, який містить N записів, міститься у зовнішній пам’яті багатопроцесорної ЕОМ, до складу якої входять m процесорів, які працюють паралельно і мають спільне поле пам’яті. Припустимо, що файл умовно розділений на n блоків по sm записів у кожному ($N = nsm$).

1. Перший підхід до побудови математичних моделей і виведення співвідношень для знаходження оптимальних параметрів

У цьому випадку для пошуку запису спочатку локалізуємо блок, який містить шуканий запис, за допомогою послідовного читання блоків записів в основну пам’ять і перегляду їх останніх m записів. Після цього пошук продовжується вже у локалізованому блоці за допомогою методу m-паралельного послідовного перегляду [2, 4].

Нехай $a_0 = b_0 + d_0ms$ – час читання блока записів в основну пам’ять, де b_0, d_0 – деякі сталі; t_0 – час виконання операції m-паралельного послідовного перегляду записів в основній пам’яті; p_i – ймовірність звертання до i-го запису файла; E_t – математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису у файлі. Подамо E_t у вигляді суми математичного сподівання часу, необхідного для локалізації блока, і математичного сподівання часу, необхідного для пошуку запису в локалізованому блоці. Тоді E_t виразиться формулою

$$E_t = \sum_{k=1}^{n} (a_0 + t_0)k \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} p_{(k-1)ms+(i-1)m+j} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} t_0 i \sum_{j=1}^{m} p_{(k-1)ms+(i-1)m+j},$$

або

$$E_t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} (a_0 k + (k+i)t_0)\, p_{(k-1)ms+(i-1)m+j}.$$

Знайдемо явний вираз для E_t у випадку різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів і дослідимо, за яких значень параметрів n і s математичне сподівання досягає мінімуму. Для цього введемо позначення

$$E_1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m} i p_{(k-1)ms+(i-1)m+j}\ ,\ E_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m} k p_{(k-1)ms+(i-1)m+j}\ . \qquad (1)$$

Тоді

$$E_t = (a_0 + t_0)E_2 + t_0 E_1 .$$

1.1. **Рівномірний розподіл**. Нехай розподіл ймовірностей звертання до записів є рівномірним. Тоді

$$E_1 = \frac{1}{2}(s+1),\ E_2 = \frac{1}{2}(n+1)$$

і

$$E_t = \frac{1}{2}\left[(n+1)(a_0+t_0)+(s+1)t_0\right],$$

або

$$E_t = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{N}{ms}+1\right)(b_0+d_0 ms)+\left(\frac{N}{ms}+s+2\right)t_0\right].$$

Оскільки

$$\frac{dE_t}{ds} = \frac{1}{2}\left[-\frac{N}{ms^2}(b_0+t_0)+d_0 m+t_0\right],$$

то для знаходження параметра s, за якого функція E_t досягає мінімуму (m вважаємо сталим), одержуємо

$$s = \left\{\frac{N(b_0+t_0)}{d_0}\Big/\left[m\left(m+\frac{t_0}{d_0}\right)\right]\right\}^{1/2}.$$

Тоді $n = N/ms$.

1.2. "**Бінарний" розподіл**. Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" розподіл, то аналогічно як в [9]

$$E_1 = \frac{s}{2^N}+\left(\frac{2^m}{2^m-1}-\frac{s}{2^{ms}-1}\right)\left(1-2^{-N}\right),\ E_2 = \frac{2^{ms}}{2^{ms}-1}\left(1-2^{-N}\right).$$

Нехтуючи нескінченно малою величиною 2^{-N}, з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E_t = \frac{2^{ms}}{2^{ms}-1}(a_0+t_0)+\left(\frac{2^m}{2^m-1}-\frac{s}{2^{ms}-1}\right)t_0,$$

або

$$E_t = \frac{2^{ms}}{2^{ms}-1}(b_0+d_0 ms)+\left(\frac{2^m}{2^m-1}+\frac{2^{ms}-s}{2^{ms}-1}\right)t_0 .$$

Оскільки

$$\frac{dE_t}{ds} = -\frac{2^{ms} m\ln 2}{(2^{ms}-1)^2}(b_0+d_0 ms)+\frac{2^{ms}}{2^{ms}-1}d_0 m+\frac{2^{ms}\left[(s-1)m\ln 2-1\right]+1}{(2^{ms}-1)^2}t_0,$$

то для знаходження параметра s, за якого E_t набуває найменшого значення, одержуємо рівняння

$$(2^{ms}-1)m+\left[(s-1)m\ln 2-1+2^{-ms}\right]\frac{t_0}{d_0} = m\left(\frac{b_0}{d_0}+ms\right)\ln 2 .$$

На множині $m \geq 2$, $s \geq 2$, m, s є N вираз

$$2^{ms}\left[(s-1)m\ln 2-1\right]+1>0$$

і щоб вираз

$$2^{ms}d_0 m(2^{ms}-1)-2^{ms}m\ln 2(b_0+d_0 ms)$$

був додатний, повинна виконуватись умова

$$2^{ms}-1-\left(\frac{b_0}{d_0}+ms\right)\ln 2>0\,.$$

Тому у разі виконання цієї умови на множині $m \geq 2$, $s \geq 2$, m, s є N функція E_t набуває найменшого значення при $s = 2$. У такому разі

$$E_t=\frac{4^m}{4^m-1}(b_0+2d_0 m)+\left(\frac{2^m}{2^m-1}+\frac{4^m-2}{4^m-1}\right)t_0\,.$$

1.3. **Закон Зіпфа**. Припустимо, що розподіл ймовірностей звертання до записів задовольняє закон Зіпфа. Тоді, аналогічно як в [9], одержуємо

$$E_1=\frac{1}{H_N}\left(H_N+s\cdot S_{ms}(n)-S_m(sn)\right),\ E_2=\frac{1}{H_N}\left((n+1)H_N-S_{ms}(n)\right),$$

де

$$S_{ms}(n)=\sum_{k=1}^{n}H_{kms}\ ,\ S_m(ns)=\sum_{k=1}^{ns}H_{km}\,.$$

Тоді

$$E_t=\frac{1}{H_N}\left[\left((n+1)H_N-S_{ms}(n)\right)(a_0+t_0)+\left(H_N+s\cdot S_{ms}(n)-S_m(sn)\right)t_0\right].$$

Використовуючи апроксимації $S_{ms}(n)$ і $S_m(ns)$ відповідно виразами [8]

$$\overline{S}_{ms}(n)=n(H_N-1)+\frac{1}{2}\ln n+C_1,\quad \overline{S}_m(ns)=ns(H_N-1)+\frac{1}{2}\ln(ns)+C_1, \qquad (2)$$

де $C_1=0.5\ln 2\pi$, із достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E_t=\frac{1}{H_N}\left\{\left(H_N+n-\frac{1}{2}\ln n-C_1\right)(a_0+t_0)+\right.$$
$$\left.+\left[H_N+(s-1)\left(\frac{1}{2}\ln n+C_1\right)-\frac{1}{2}\ln s\right]t_0\right\},$$

або

$$E_t=\frac{1}{H_N}\left\{\left(H_N+n-\frac{1}{2}\ln n-C_1\right)\left(b_0+t_0+\frac{Nd_0}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[H_N+\left(\frac{N}{mn}-1\right)\left(\frac{1}{2}\ln n+C_1\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{N}{nm}\right]t_0\right\}.$$

Оскільки

$$\frac{dE_t}{dn}=\frac{1}{H_N}\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(b_0+t_0+\frac{Nd_0}{n}\right)-\frac{Nd_0}{n^2}\left(H_N+n-\frac{1}{2}\ln n-C_1\right)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{N}{mn^2}(\ln n+2C_1)+\left(\frac{N}{mn}-1\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)\right]t_0\right\},$$

то для знаходження значення параметра n, за якого E_t досягає найменшого значення, одержуємо рівняння

$$n(2n-1)m\frac{b_0+t_0}{d_0}=N\left[2H_N m+\left(\frac{t_0}{d_0}-m\right)(\ln n+2C_1-1)\right].$$

1.4. **Узагальнений закон**. Нехай розподіл імовірностей звертання до записів задовольняє узагальнений закон розподілу. Тоді, аналогічно як в [9], отримуємо

$$E_1=\frac{1}{H_N^{(c)}}\left(H_N^{(c)}+s\cdot S_{ms}^{(c)}(n)-S_m^{(c)}(sn)\right),\quad E_2=\frac{1}{H_N^{(c)}}\left((n+1)H_N^{(c)}-S_{ms}^{(c)}(n)\right),$$

де

$$S_{ms}^{(c)}(n)=\sum_{k=1}^{n}H_{kms}^{(c)}\,,\ S_m^{(c)}(n)=\sum_{k=1}^{n}H_{km}^{(c)}\,.$$

Тоді

$$E_t=\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[(n+1)H_N^{(c)}-S_{ms}^{(c)}(n)\right](a_0+t_0)+\left[H_N^{(c)}+s\cdot S_{ms}^{(c)}(n)-S_m^{(c)}(ns)\right]t_0\right\}.$$

Використовуючи для $S_{ms}^{(c)}(n)$ і $S_m^{(c)}(ns)$ відповідні апроксимації [8]

$$\overline{S}_{ms}^{(c)}(n)=nH_N^{(c)}+\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right), \tag{3}$$

$$\overline{S}_m^{(c)}(ns)=nsH_N^{(c)}+\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}ns+\frac{\alpha^{(c)}(ns)}{(ns)^{1-c}}\right),$$

де $\alpha^{(c)}(n)=H_n^{(c-1)}-\frac{1}{2-c}n^{2-c}$, $\alpha^{(c)}(ns)=H_{ns}^{(c-1)}-\frac{1}{2-c}(ns)^{2-c}$ – повільно зростаючі функції, з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E_t=\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[H_N^{(c)}-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right](a_0+t_0)+\right.$$
$$\left.+\left[H_N^{(c)}+\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(s\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}-\frac{\alpha^{(c)}(ns)}{(ns)^{1-c}}\right)\right]t_0\right\},$$

або

$$E_t=\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[H_N^{(c)}-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right]\left(b_0+t_0+d_0\frac{N}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[H_N^{(c)}+\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{N}{m}\cdot\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}}-\frac{\alpha^{(c)}(N/m)}{(N/m)^{1-c}}\right)\right]t_0\right\}.$$

Візьмемо похідну від E_t по n, приймаючи $\frac{d\alpha^{(c)}(n)}{dn}\approx\alpha^{(c)}(n+1)-\alpha^{(c)}(n)$. Одержимо

$$\frac{dE_t}{dn}\approx\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}+\frac{n(\alpha^{(c)}(n+1)-\alpha^{(c)}(n))-(1-c)\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}}\right)\times\right.$$
$$\times\left(b_0+t_0+d_0\frac{N}{n}\right)+d_0\frac{N}{n^2}\left[H_N^{(c)}-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{N^{1-c}}{1-c}\cdot\frac{N}{m}\cdot\frac{n(\alpha^{(c)}(n+1)-\alpha^{(c)}(n))-(2-c)\alpha^{(c)}(n)}{n^{3-c}}t_0\right]\right\}.$$

Тоді для наближеного обчислення значення параметра n, за якого E_t набуває найменшого значення, дістаємо рівняння

$$n^{3-c}\frac{b_0+t_0}{d_0}+n^{2-c}N+(2-c)N^c n^{1-c}\left[H_n^{(c)}-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right]=$$

$$=\frac{2-c}{1-c}\left[n\left(\alpha^{(c)}(n+1)-\alpha^{(c)}(n)\right)-(1-c)\alpha^{(c)}(n)\right]\left(\frac{N}{m}\frac{t_0}{d_0}-n\frac{b_0+t_0}{d_0}-N\right).$$

Оскільки на практиці здебільшого визначити значення сталих b_0, d_0 та t_0 є доволі складно, та й значення цих сталих досить сильно змінюється для різних обчислювальних машин, то в подальших обчисленнях припускатимемо, що нам відомі значення відношень b_0/d_0 та t_0/d_0, які є достатньо близькими для різних обчислювальних машин. Тому для практичних обчислень дослідження функції E_t ми замінимо на дослідження функції E_t/d_0, яка у випадку першого підходу матиме такий вигляд:

- рівномірний розподіл

$$\frac{E_t}{d_0}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{N}{ms}+1\right)\left(\frac{b_0}{d_0}+ms\right)+\left(\frac{N}{ms}+s+2\right)\frac{t_0}{d_0}\right];$$

- “бінарний” розподіл

$$\frac{E_t}{d_0}=\frac{2^{ms}}{2^{ms}-1}\left(\frac{b_0}{d_0}+ms\right)+\left(\frac{2^m}{2^m-1}+\frac{2^{ms}-s}{2^{ms}-1}\right)\frac{t_0}{d_0};$$

- закон Зіпфа

$$\frac{E_t}{d_0}=\frac{1}{H_N}\left\{\left(H_N+n-\frac{1}{2}\ln n-C_1\right)\left(\frac{b_0+t_0}{d_0}+\frac{N}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[H_N+\left(\frac{N}{mn}-1\right)\left(\frac{1}{2}\ln n+C_1\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{N}{nm}\right]\frac{t_0}{d_0}\right\};$$

- узагальнений закон розподілу

$$\frac{E_t}{d_0}=\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[H_N^{(c)}-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right]\left(\frac{b_0+t_0}{d_0}+\frac{N}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[H_N^{(c)}+\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{N}{m}\cdot\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}}-\frac{\alpha^{(c)}(N/m)}{(N/m)^{1-c}}\right)\right]\frac{t_0}{d_0}\right\}.$$

На рис. 1 зображена залежність функції E_t/d_0 від закону розподілу ймовірностей звертання до записів у випадку оптимальних значень параметра n, $N = 10^6$, $b_0/d_0 = 100$, $t_0/d_0 = 0{,}003$ та для $m = 5$.

Як бачимо з рис. 1, функція E_t/d_0, а отже, і функція E_t досить істотно залежить від закону розподілу ймовірностей звертання до записів.

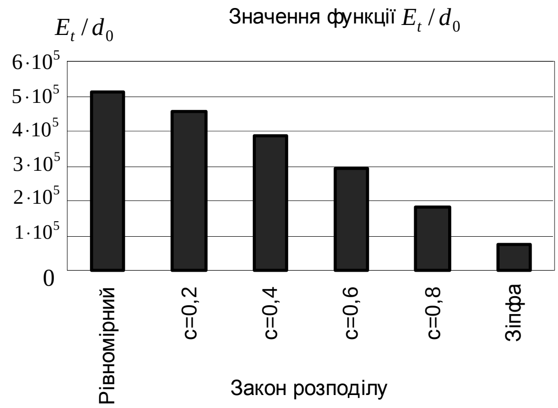

Рис. 1. Залежність функції Et/d0 від закону розподілу ймовірностей звертання до записів для знайдених оптимальних значень параметра n, N = 106, b0/d0 = 100, t0/d0 = 0,003 та m = 5

2. Другий підхід до побудови математичних моделей і виведення співвідношень для знаходження оптимальних параметрів

У цьому підході для пошуку потрібного запису спочатку локалізується блок, який містить шуканий запис, читанням в основну пам'ять m останніх записів блоків. Після цього локалізований блок зчитується в основну пам'ять і пошук потрібного запису в ньому відбувається за допомогою методу m-паралельного послідовного перегляду [2, 4].

Нехай $a_0 = b_0 + d_0 m$ – час читання m записів в основну пам'ять, де b_0, d_0 – деякі сталі; t_0, p_i, E_t мають ці самі значення, що і в попередньому підході. Подамо E_t у вигляді суми математичного сподівання часу, необхідного для локалізації блока, часу зчитування блока в основну пам'ять і математичного сподівання часу, необхідного для пошуку запису в локалізованому блоці. Тоді E_t виразиться формулою

$$E_t = \sum_{k=1}^{n}(a_0 + t_0)k\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m} p_{(k-1)ms+(i-1)m+j} + a_0 s + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} t_0 i \sum_{j=1}^{m} p_{(k-1)ms+(i-1)m+j},$$

або

$$E_t = a_0 s + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\left((a_0 + t_0)k + t_0 i\right) p_{(k-1)ms+(i-1)m+j}.$$

Знайдемо явний вираз для E_t у разі різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів і дослідимо, за яких значень параметрів n і s математичне сподівання досягає мінімуму.

Якщо використати позначення (1), то

$$E_t = a_0 s + (a_0 + t_0)E_2 + t_0 E_1.$$

2.1. **Рівномірний розподіл.** Нехай розподіл ймовірностей звертання до записів є рівномірним. Тоді, аналогічно як в п. 1.1

$$E_t = a_0 s + \frac{1}{2}(n+1)(a_0 + t_0) + \frac{1}{2}(s+1)t_0,$$

або

$$E_t = \left[\frac{N}{nm} + \frac{1}{2}(n+1)\right](b_0 + d_0 m) + \frac{1}{2}\left(n + \frac{N}{nm} + 2\right)t_0.$$

Оскільки

$$\frac{dE_t}{dn} = \left[\frac{1}{2} - \frac{N}{n^2 m}\right](b_0 + d_0 m) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N}{n^2 m}\right)t_0,$$

то для знаходження параметра n, за якого функція E_t досягає мінімуму, одержуємо

$$n = \left[\frac{N}{m}\left(\frac{\frac{b_0}{d_0} + m}{\frac{b_0}{d_0} + m + \frac{t_0}{d_0}} + 1\right)\right]^{1/2}.$$

Тоді $s = N / mn$.

2.2. **"Бінарний" розподіл.** Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" розподіл, то аналогічно, як в п. 1.2., з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E_t = a_0 s + \frac{2^{ms}}{2^{ms} - 1}(a_0 + t_0) + \left(\frac{2^m}{2^m - 1} - \frac{s}{2^{ms} - 1}\right)t_0,$$

або

$$E_t = \left(s + \frac{2^{ms}}{2^{ms} - 1}\right)(b_0 + d_0 m) + \left(\frac{2^m}{2^m - 1} + \frac{2^{ms} - s}{2^{ms} - 1}\right)t_0.$$

Оскільки

$$\frac{dE_t}{ds}=\left(1-\frac{2^{ms}m\ln 2}{(2^{ms}-1)^2}\right)(b_0+d_0m)+\frac{2^{ms}[(s-1)m\ln 2-1]+1}{(2^{ms}-1)^2}t_0,$$

та при $m \geq 2$, $s \geq 2$, m, $s \in N$ функція E_t набуває найменшого значення при s = 2. У такому разі

$$E_t=\left(2+\frac{4^m}{4^m-1}\right)(b_0+d_0m)+\left(\frac{2^m}{2^m-1}+\frac{4^m-2}{4^m-1}\right)t_0.$$

2.3. **Закон Зіпфа.** Припустимо, що розподіл ймовірностей звертання до записів задовольняє закон Зіпфа. Тоді, аналогічно як в п. 1.3.

$$E_t=a_0s+\frac{1}{H_N}[((n+1)H_N-S_{ms}(n))(a_0+t_0)+(H_N+s\cdot S_{ms}(n)-S_m(sn))t_0]$$

і, використовуючи апроксимації сум $S_{ms}(n)$ і $S_m(ns)$ відповідно виразами (2), з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E_t=a_0s+\frac{1}{H_N}\left\{\left(H_N+n-\frac{1}{2}\ln n-C_1\right)(a_0+t_0)+\right.$$

$$\left.+\left[H_N+(s-1)\left(\frac{1}{2}\ln n+C_1\right)-\frac{1}{2}\ln s\right]t_0\right\},$$

або

$$E_t=(b_0+d_0m)\frac{N}{mn}+\frac{1}{H_N}\left\{\left(H_N+n-\frac{1}{2}\ln n-C_1\right)(b_0+t_0+d_0m)+\right.$$

$$\left.+\left[H_N+\left(\frac{N}{mn}-1\right)\left(\frac{1}{2}\ln n+C_1\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{N}{nm}\right]t_0\right\}.$$

Оскільки

$$\frac{dE_t}{dn}=(b_0+d_0m)\left(-\frac{N}{mn^2}\right)+\frac{1}{H_N}\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)(b_0+t_0+d_0m)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{N}{mn^2}(\ln n+2C_1)+\left(\frac{N}{mn}-1\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)\right]t_0\right\},$$

то для знаходження значення параметра n, за якого E_t досягає найменшого значення, одержуємо рівняння

$$n(2n-1)\left(m+\frac{b_0+t_0}{d_0}\right)=\frac{N}{m}\left[(\ln n+2C_1-1)\frac{t_0}{d_0}+2H_N\left(m+\frac{b_0}{d_0}\right)\right].$$

2.4. **Узагальнений закон.** Нехай розподіл імовірностей звертання до записів задовольняє узагальнений закон розподілу. Тоді, аналогічно як в п. 1.4.

$$E_t=a_0s+\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[(n+1)H_N^{(c)}-S_{ms}^{(c)}(n)\right](a_0+t_0)+\left[H_N^{(c)}+s\cdot S_{ms}^{(c)}(n)-S_m^{(c)}(ns)\right]t_0\right\}$$

і, використовуючи для $S_{ms}^{(c)}(n)$ і $S_m^{(c)}(ns)$ відповідні апроксимації (3),
з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E_t=a_0s+\frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[H_N^{(c)}-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n+\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right](a_0+t_0)+\right.$$

$$\left.+\left[H_N^{(c)}+\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(s\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}-\frac{\alpha^{(c)}(ns)}{(ns)^{1-c}}\right)\right]t_0\right\},$$

або

$$E_t = (b_0 + d_0 m)\frac{N}{mn} + \frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[H_N^{(c)} - \frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right](b_0 + t_0 + d_0 m) + \right.$$
$$\left. + \left[H_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{N}{m}\cdot\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}} - \frac{\alpha^{(c)}(N/m)}{(N/m)^{1-c}}\right)\right]t_0\right\}.$$

Візьмемо похідну від E_t по n, приймаючи $\frac{d\alpha^{(c)}(n)}{dn} \approx \alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)$. Отримаємо

$$\frac{dE_t}{dn} \approx -\frac{N}{mn^2}(b_0 + d_0 m) +$$
$$+ \frac{1}{H_N^{(c)}}\left[-\frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c} + \frac{n(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)) - (1-c)\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}}\right)(b_0 + t_0 + d_0 m) + \right.$$
$$\left. + \frac{N^{1-c}}{1-c}\cdot\frac{N}{m}\cdot\frac{n(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)) - (2-c)\alpha^{(c)}(n)}{n^{3-c}}t_0\right].$$

Тоді для наближеного обчислення значення параметра n, за якого E_t набуває найменшого значення, дістаємо рівняння

$$\left\{n^{3-c} - \frac{2-c}{(1-c)^2}n\left[n\left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)\right) - (1-c)\alpha^{(c)}(n)\right]\right\}(b_0 + d_0 m + t_0) +$$
$$+ \frac{2-c}{(1-c)^2}\frac{N}{m}\left[n\left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)\right) - (2-c)\alpha^{(c)}(n)\right]t_0 =$$
$$= \frac{2-c}{1-c}\frac{N^c}{m}H_N^{(c)}n^{1-c}(b_0 + d_0 m).$$

За другого підходу до побудови оптимальних стратегій функція E_t/d_0 матиме вигляд:

- рівномірний розподіл

$$\frac{E_t}{d_0} = \left[\frac{N}{nm} + \frac{1}{2}(n+1)\right]\left(\frac{b_0}{d_0} + m\right) + \frac{1}{2}\left(n + \frac{N}{nm} + 2\right)\frac{t_0}{d_0};$$

- “бінарний” розподіл

$$\frac{E_t}{d_0} = \left(s + \frac{2^{ms}}{2^{ms}-1}\right)\left(\frac{b_0}{d_0} + m\right) + \left(\frac{2^m}{2^m - 1} + \frac{2^{ms} - s}{2^{ms} - 1}\right)\frac{t_0}{d_0};$$

- закон Зіпфа

$$\frac{E_t}{d_0} = \left(\frac{b_0}{d_0} + m\right)\frac{N}{mn} + \frac{1}{H_N}\left\{\left(H_N + n - \frac{1}{2}\ln n - C_1\right)\left(\frac{b_0 + t_0}{d_0} + m\right) + \right.$$
$$\left. + \left[H_N + \left(\frac{N}{mn} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\ln n + C_1\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{N}{nm}\right]\frac{t_0}{d_0}\right\};$$

- узагальнений закон розподілу

$$\frac{E_t}{d_0} = \left(\frac{b_0}{d_0} + m\right)\frac{N}{mn} + \frac{1}{H_N^{(c)}}\left\{\left[H_N^{(c)} - \frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{c-1}{2-c}n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}}\right)\right]\left(\frac{b_0 + t_0}{d_0} + m\right) + \right.$$
$$\left. + \left[H_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c}\left(\frac{N}{m}\cdot\frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}} - \frac{\alpha^{(c)}(N/m)}{(N/m)^{1-c}}\right)\right]\frac{t_0}{d_0}\right\}.$$

На рис. 2 зображена залежність функції E_t/d_0 від закону розподілу ймовірностей звертання до записів у випадку оптимальних значень параметра *n*, $N = 10^6$, $b_0/d_0 = 100$, $t_0/d_0 = 0{,}003$ та для $m = 10$.

Як бачимо з рис. 2, функція E_t/d_0 досить істотно залежить від закону розподілу ймовірностей звертання до записів.

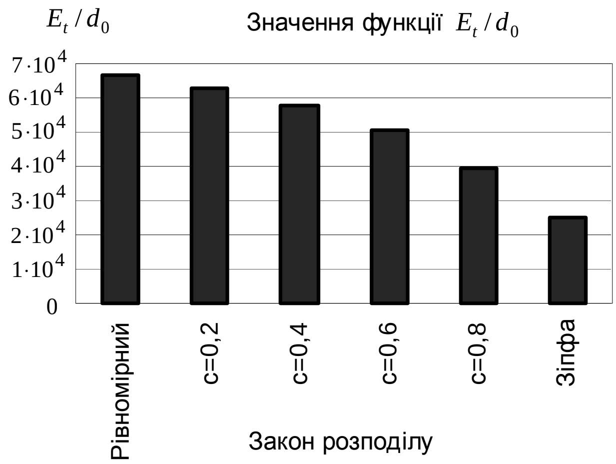

Рис. 2. Залежність функції E_t/d_0 від закону розподілу ймовірностей звертання до записів для знайдених оптимальних значень параметра n, $N = 10^6$, $b_0/d_0 = 100$, $t_0/d_0 = 0{,}003$ та $m = 5$

3. Порівняння двох підходів до побудови математичних моделей

Оптимальні значення параметра *n*, за яких функція E_t, а значить і E_t/d_0, досягає мінімуму, і оптимальне значення функції E_t/d_0 для $N = 10^6$, $b_0/d_0 = 100$, $t_0/d_0 = 0{,}003$ у випадку $m = 5$ та $m = 50$ і різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів наведені відповідно в табл. 1 і табл. 2.

Таблиця 1

Порівняння двох підходів для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів у випадку оптимальних значень параметра *n* та *m* = 5

Підхід	Значення	Рівномірний	Узагальнений				Зіпфа	“Бінарний”
			c=0.2	c=0.4	c=0.6	c=0.8		
Перший підхід	Оптимальні значення параметра n	100	107	117	138	188	333	200 000
	Значення функції E_t/d_0	510 053	453 951	383 86 1	294 476	183 127	74 073	105.01
Другий підхід	Оптимальні значення параметра n	632	671	730	835	1064	1697	200 000
	Значення функції E_t/d_0	66 461	62 664	57 569	50 333	39 521	24 826	315,11

Таблиця 2

Порівняння двох підходів для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів у випадку оптимальних значень параметра *n* та *m* = 50

Підхід	Значення	Рівномірний	Узагальнений				Зіпфа	“Бінарний”
			c=0.2	c=0.4	c=0.6	c=0.8		
Перший підхід	Оптимальні значення параметра n	100	107	117	138	188	333	20000
	Значення функції E_t/d_0	510 050	453 949	383 858	294 475	183 125	74 072	150.01
Другий підхід	Оптимальні значення параметра n	200	212	231	264	337	537	20000
	Значення функції E_t/d_0	30 075	28 360	26 059	22 792	17 915	11 291	450,01

Як бачимо, другий підхід до побудови оптимальних стратегій значно ефективніший, ніж перший. У разі збільшення кількості процесорів за другого підходу ефективність істотно зростає для всіх законів розподілу ймовірностей звертання до записів, крім "бінарного". Для першого підходу збільшення кількості процесорів не веде до покращання ефективності, а у разі "бінарного" закону розподілу призводить до погіршення. Для другого підходу збільшення кількості процесорів веде до зменшення оптимальної кількості блоків (зменшення параметра n). Ефективність розглянутих підходів досить істотно залежить від закону розподілу ймовірностей звертання до записів.

Висновки

Виконано порівняльний аналіз двох підходів до побудови оптимальних стратегій пошуку записів з використанням методу m-паралельного блочного пошуку в послідовних упорядкованих файлах баз даних, які зберігаються у зовнішній пам'яті багатопроцесорної ЕОМ, для таких законів розподілу ймовірностей звертання до записів, як рівномірний, "бінарний", Зіпфа та узагальнений, частковим випадком якого є розподіл, що наближено задовольняє правило "80 – 20". За критерій оптимальності взято математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису у файлі.

На підставі одержаних даних доходимо висновку, що другий підхід до побудови оптимальних стратегій значно ефективніший, ніж перший. Досліджені оптимальні стратегії пошуку записів з використанням розглянутого варіанта методу m-паралельного блочного пошуку досить істотно залежать від закону розподілу ймовірностей звертання до записів.

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.3: Сортировка и поиск / Д. Кнут. – М.: Изд. дом. «Вильямс», 2000. – 832 с. 2. Лісовець В.Я. Метод m-паралельного послідовного перегляду записів та його використання для пошуку інформації у послідовних файлах баз даних / В. Я. Лісовець, Г.Г. Цегелик // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 109–119. 3. Лісовець В.Я. Метод m-паралельного блочного пошуку записів у файлах баз даних та його ефективність / В.Я. Лісовець, Г.Г. Цегелик // Відбір та обробка інформації. – 2007. – Вип. 27(103). – С. 87–92. 4. Лісовець В.Я. Метод m-паралельного послідовного пошуку записів у файлах баз даних і його ефективність / В.Я. Лісовець, Г.Г. Цегелик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 13. – С. 177–186. 5. Лісовець В. Я. Моделювання та оптимізація паралельного доступу до інформації файлів баз даних для багатопроцесорних ЕОМ / В.Я. Лісовець, Г.Г. Цегелик // Міжн. наук.-техн. журнал Комп'ютинг. – 2009. – Т. 8, Вип. 2. – С. 24–30. 6. Лісовець В.Я. Один з варіантів методу m-паралельного блочного пошуку записів і його ефективність / В.Я. Лісовець, Г.Г. Цегелик // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 103–111. 7. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах / Дж. Мартин. – М.: Мир, 1980. – 644 с. 8. Цегелик Г. Г. Организация и поиск информации в базах данных / Г.Г. Цегелик. – Львов: Вища шк., 1987. – 176 с. 9. Цегелик Г.Г. Системы распределенных баз данных / Г.Г. Цегелик. – Львов: Світ, 1990. – 168 с.