

МАТЕМАТИЧНЕ Й АЛГОРИТМІЧНО-ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ЗАСОБІВ СТАТИСТИЧНОГО ОПРАЦЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ КОЛИВАНЬ (РИТМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ)

© Драган Я.П., 2008

Ставиться проблема ролі математичного забезпечення обчислювальних (чи радше комп'ютерних) систем як суттєвого засобу сучасних наукових досліджень та практичного використання їхніх результатів. Викладені погляди на способи розв'язування цієї проблеми, проілюстровано моделями стохастичних коливань і прикладом запровадженної моделі як періодично корельованого ізостаціонарного випадкового процесу – реалізації цього підходу.

There is a stated problem of the role of mathematical support for calculation (or rather computer) systems as an essential means of modern scientific are illustrated by stochastic vibrations investigation and using of their results in practice. The exposed opinions and the methods to solve this problem are illustrated by stochastic vibrations models and by an example of new introduced version of periodically correlated in stationary random process as the realization of this approach.

Формулювання проблеми

Актуальні задачі збільшення ефективності наукових досліджень і використання результатів їх у практиці висувають підвищені вимоги до всіх ланок тріади «модель–алгоритм–програмна реалізація» (МАПР) опрацювання сигналів та функціонування аналітичних систем. При цьому вибір моделі тут є вирішальним фактором: вона має втілювати у своїй структурі істотні з погляду розв'язування проблем властивості досліджуваних об'єктів. Йдеться про математичну модель як об'єкт певного розділу математики, що підпорядковується правилам і діям цього розділу математики – вже існуючого чи розроблюваного спеціально для цієї мети, і у процесі наукового дослідження виступає як заміник досліджуваного об'єкта, а результати дій над ним мають дати відомості про цей об'єкт. Коректні застосування згаданих правил і дій мають автоматизувати умовиводи і гарантувати істинність отриманих результатів, тлумачення яких можливе винятково у термінах властивостей моделі.

Центральна роль моделі визначається ще й тим, що алгоритм як послідовність узгоджених дій (операцій) і з певної системи, виконання яких має вести за скінченну кількість кроків до розв'язання задачі дослідження, має складатись із таких операцій, що є відповідно виконаними над моделлю. Цим розкривається сенс поняття математичного забезпечення комп'ютерних систем, яке вже як обґрунтований, адекватний моделі алгоритм стає, своєю чергою, підставою програмної реалізації його, тобто програмного забезпечення комп'ютерної системи як апаратно-програмного комплексу в сенсі В. Глушкова.

Ця обставина вимагає від теорії сигналів – фізичних засобів перенесення і фіксації відомостей (даних) про досліджуваний об'єкт розширення запасу можливих придатних до використання (тобто досить розроблених, досліджених і зведених у логічно зв'язну систему) моделей, збільшення адекватності їх конкретним ситуаціям, інформативності, повноти вивченості їхніх властивостей, ефективності розроблених на підставі них алгоритмів, методів розв'язування практичних задач.

Теорія сигналів, основана на властивості стаціонарності, тобто інваріантності (незмінності, сталості) характеристик її моделей здобула широке визнання і трактування у певному сенсі яко стандартна. Це зумовлено ясністю її вихідних положень і тим, що її методи й процедури аналізу добре опрацьовані. Результати ж щодо нестаціонарних моделей отримані дослідниками спеціальних надто обмежливих припущень, випливаючи з історії проблеми, традицій чи математичної зручності, не творять загалом якоїсь системи, внутрішньо не пов'язані і в більшості випадків не можуть бути узгодженими з собою. Ця обставина показує важливість і вчасність перебудови концептуальної й математичної бази за єдиною методологічною підставою. За деталями відсилаємо читача до доповіді [1], у якій презентовано принципи і деякі результати на шляху реалізації такої програми.

Отже, як бачимо, перед теорією сигналів постала проблема вироблення загальної концепції побудови і дослідження математичних моделей та застосування її положень до кожної конкретної задачі, спрямованої на адаптацію комп'ютерних засобів для її розв'язання.

Далі проілюструємо суть виробленої концепції на прикладі стохастичних коливань (ритміки), яка враховує як повторність характеристик, так і випадковість значень їх та підтвердимо продуктивність цього підходу запровадженням нової специфічної моделі.

Стисла історія ідей та логічний аспект

Вже сказано, що спершу в аналізі стохастичних коливань запанувала стаціонарна парадигма (цей термін з грецької і означає зразок, а тут – загальновизнаний спосіб трактування), яка бере початок з праць А. Шустера, Дж. Юла і фундатора теорії випадкових процесів, нашого славного дослідника Є. Слуцького. В розробленні її аналітичного апарату вирішальним стало врахування симетрії – зокрема інваріантності характеристик як процесів, так і перетворювачів їх щодо будь-яких можливих зсувів (трансляцій) часових аргументів. Це забезпечило успіх і визнання принципу виокремлення класу стаціонарних випадкових процесів – за симетрією.

Беручи до уваги, що поділ «стаціонарний–нестационарний» не є класифікацією (хоч і є розбиттям), тому що заперечення (властивості) не може слугувати визначником класу, автор сформулював принцип: оскільки стаціонарний (інваріантний) клас виокремлений з усієї маси розмаїтих процесів за симетрією, знайти подібний критерій виокремлення інших цікавих і практично важливих класів. За підставу формулювання такого критерію з врахуванням матеріалів багатьох публікацій з аналізу (зокрема, спектрального) та в розвиток тези Слуцького, що для розв'язування енергетичних задач стосовно випадкових процесів досить теорії другого порядку – кореляційної, автор здогадався взяти енергетичну концепцію. Цей здогад виявився продуктивним і привів до створення енергетичної теорії стохастичних сигналів (ЕТСС). Суть її – виокремлення двох енергетичних класів випадкових процесів за скінченністю їхніх енергетичних характеристик: (повної) енергії клас $\mathcal{E}$ чи середньої (в часі) потужності (клас π), і розробленої теорії паралельно для обох класів.

Вибрані як норми відповідних просторів сигналів – їхніх моделей у вигляді випадкових процесів – ці характеристики визначають математичний апарат теорії як засоби відповідних варіантів функційних гільбертових просторів, а саме L^2 – просторів для класу $\mathcal{E}$ і B^2 – просторів для класу π над колмогоровським гільбертовим простором випадкових величин скінченної дисперсії під час дослідження розкладів процесів та оснащених гільбертових просторів – для аналізу властивостей їхніх коваріацій. Такі простори є сучасними здобутками функціонального аналізу. Цим досягнуто значною мірою вивершення кореляційної теорії і розширення можливостей її застосування.

ЕТСС стала основою загалом нестаціонарної парадигми, але не відкинула стаціонарну, а поглинула її: клас стаціонарних випадкових процесів став тепер підкласом класу π (дещо виродженим, як сказав би фізик-теоретик). А поширення досвіду стаціонарної парадигми наводить на думку про подальше клонування (від грецького паросток, пагін) класу π за симетрією – виокремлення поряд з класом стаціонарних ще класів інших цікавих теоретично і практично

важливих випадкових процесів. Так були означені періодично корельовані та споріднені з ними майже періодично та поліперіодно корельовані випадкові процеси як моделі ритміки – відповідно простої, нестрогої та кратної. Але це вже у ході процесу й опісля створення ЕТСС як системи, власне підстави й засобу систематизації.

Виникла ідея такої єдиної підстави з досліджень проблеми ритміки природних явищ і процесів – опису їх, обґрунтування статистичних методів аналізу емпіричних даних про їхні характеристики на початку 70-х років минулого століття. Ця проблема поставила на порядок денний настійну потребу вироблення основ потрібної теорії названих явищ. Вона стала розвитком ідеї публікації [2] про сумісний опис і аналіз випадкових процесів та систем, які породжують та перетворюють їх, – таких, що мають періодично змінні характеристики. Основи теорії класу випадкових процесів, яка узагальнює концепцію ритміки, заклали публікації [2–4], а застосування – [5, 8]. Єдина ж концепція – енергетична як фізична і математична підстава її (й не тільки) – обґрунтована у статті [9]. Висновки опрацювання цієї ідеї та застосування для вироблення системи понять, математичного апарату аналізу, фізичного тлумачення та застосування до деяких практичних задач зроблено у монографії [10]. Огляд [11] відзначає пріоритет і місце результатів автора, його колег і учнів у розвитку цього напрямку. А те згадане у назві огляду півстоліття відраховується все-таки з публікацій О. Коронкевича (див. [12]), який вперше розглядав перетвори шуму періодичними й майже періодичними системами (описуваними відповідними диференціальними рівняннями) і запровадив відповідні класи випадкових процесів, давши означення їх як періодично і майже періодично корельованих. Розглянуті ним процеси є частковими прикладами лінійних – сформованих відповідними перетворювачами із шуму, але означив він загальні класи. Термін же циклостационарність вживаний на Заході США і рівносильний періодичній корельованості – термінові, вживаному в нас, в колишньому СРСР (московські науковці Є. Гладішев, Л. Гудзенко, В. Алексєєв, А. Яглом) та на сході США (група Гарда через Яглома, який у 90-ті роки виїхав у США), підтримувала контакти з московськими дослідниками.)

Енергетична теорія стохастичних сигналів – стадія аналізу моделей ритміки у вигляді періодично корельованих та споріднених з ними випадкових процесів

Періодично корельовані випадкові процеси (ПВКП) і споріднені з ними майже періодично і поліперіодно корельовані як їхнє узагальнення слугують моделями у розвиненій автором концепції ритміки природних явищ і стохастичних коливань, істотно узагальнюючи статистичну (ймовірнісну) теорію коливань А. Колмогорова, яка ґрунтується на стаціонарній моделі.

Такі моделі описують сигнали, що їх висилають системи з обертаннями, кружляннями, пропелерами, вібраціями, часовий хід природних процесів, біоритми, осциляційну кінетику, поєднуючи в одному математичному об'єкті випадковість і повторність.

А фундаментальна роль коливань була усвідомлена вже Г. Галілеєм, Х. Гюйгенсом та І. Ньютоном і знайшла повне розкриття в матфізиці та інших розділах фізики: оптиці, електромагнетизмі, радіофізиці і т.д., починаючи з гармонічного осцилятора аж до квантової теорії, породивши спершу детерміністську парадигму, яка в силу факту, як каже відомий дослідник коливань А. Піпард, що ...«живемо в реальному світі, то маємо вміти пов'язувати у мисленні цей світ з абстрактними процесами аналізу...», а поняття «коливання» охоплює майже все, що флюктує більш-менш періодично», стала поступово видозмінюватись та переросла у стохастичну парадигму коливань, яка містить дертерміністську як їх вироджений частковий випадок. При цьому повторність, трактована як періодичність значень величин – ознак коливних об'єктів і описувана періодичними функціями (найпростіша з них гармоніка – це синус та/чи косинус або поєднання їх згідно з формулою Ойлера в комплексній експоненті $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, а будь-яка періодична функція періоду T подається у вигляді суми з відповідними коефіцієнтами гармонік з частотами,

кратними базовий $\lambda = 2\pi/T$), у стохастичній парадигмі трактується (для врахування «домішки» випадковості) як періодичність імовірнісних характеристик цих значень і відповідно до тези Слуцького в межах ЕТСС трактується як періодичність коваріацій процесів, значеннями яких є вже випадкові величини. Внаслідок ермітової симетрії коваріацій ця періодичність описується як інваріантність її щодо однакових зсувів обох її аргументів, тобто має задовольняти умову

$$r(t+T, s+T) = r(t, s) \quad (1)$$

при всіх $t, s \in R$, де R – дійсне числова вісь, а $T \in R$ – фіксоване число (період корельованості). Матсподівання має дорівнювати нулеві. Якщо ж не так, то воно є періодичною функцією і аналізується, як у детерміністичній моделі. Отже, все, що вносить у теорію коливань стохастична парадигма, міститься у властивостях коваріацій. Випадкові процеси з властивістю (1) під назвою періодично корельовані означив уперше О. Коронкевич [12].

Автором і його учнями обґрунтовано вибір таких процесів як математичної моделі стохастичних коливань – простої ритміки, а споріднених з ними – складної ритміки. За деталями треба звернутись до публікацій, особливо [11,13], де є факти з історії питання, систематизовані властивості, на основі яких обґрунтовано методи статистичного оцінення характеристик ПКВП на підставі установлення застосовності для цього належним чином модифікованих статистик із теорії стаціонарних випадкових процесів та програмної реалізації їх. Ідейною основою такої можливості є не тільки той факт, що стаціонарні процеси є підкласом ПКВП, бо їхні коваріації задовольняють умову інваріантності.

$$r(t+u, s+u) = r(t, s) = R(t-s) \quad (2)$$

при всіх $t, s, u \in R$, але й інші факти стаціонарної теорії використано в теорії ПКВП, для побудови якої стаціонарно слугувала зразком. ПКВП мають подання – модуляційні (гетеродинні) та трансляційні через стаціонарні компоненти, які творять відповідні векторні стаціонарні випадкові процеси чи послідовності. Цими фактами показано, що ЕТСС охоплює вживані в літературі моделі ритміки на правах своїх часткових випадків.

На завершення цього викладу ідей побудови математичного забезпечення аналізу ритміки в комп'ютерних системах, що ґрунтується на стохастичній концепції ритміки та її моделі у вигляді періодично корельованих випадкових процесів і вказання результатів цієї теорії ритміки, проілюстровано ще застосуванням клонування загальної моделі ритміки – запровадженням специфічної нової їхньої моделі.

Нова модель періодично корельованих ізостаціонарних випадкових процесів як часткова модель ритміки

Вже було сказано, що ЕТСС стала підставою для вироблення апарату аналізу загальних питань ритміки явищ і процесів – фактично сигналів як носіїв відомостей про неї і водночас охоплення єдиною спільною схемою відомих використовуваних часткових моделей ритміки, ставши засобом зіставлення їхньої специфіки, розроблення й обґрунтування методів (алгоритмів та програмної реалізації статистичного опрацювання даних, отримуваних із сигналів, і тлумачення результатів цього опрацювання як бази для висновків про досліджувані явища і процеси та формування рішень щодо мети всього дослідження й використання отримуваних відомостей. Загальна теорія ритміки підтверджує відому тезу, що чим загальніша модель, тим менше висновків з неї випливає, тому виокремлення (додатковими умовами) часткових специфічних випадків зменшує обсяг застосовності нової часткової моделі та за рахунок цього збільшує (поглиблює) зміст і відповідно збільшує кількість висновків, що випливають із неї. Це робить дослідження гнучкішим, адаптованішим до ситуації, надаючи більше значення системному аналізу ситуації та інтуїції дослідника.

Ця теза є варіантом знаменитого принципу Арістотеля щодо співвідношення між змістом та обсягом понять. Його відомий сучасний математик наших часів П. Голмош (Р. Halmos) стосовно тої царини математики, що була центром його уваги, сформулював словами: «За винятком розміру (тобто розмірності) один гільбертів простір дуже подібний до іншого. Щоб зробити гільбертів простір цікавішим за його сусідів, доконче збагатити його додаванням певної зовнішньої структури». І далі він сказав: «Серце математики складають конкретні приклади і конкретні проблеми. Обширні загальні теорії виникають після обдумування маленьких, але глибоких суджень; самі ж судження починаються з заглиблення у конкретні часткові випадки». Остання фраза характеризує етап синтезу. В розглядуваній проблемі – це індуктивна побудова загальної стохастичної концепції ритміки та обґрунтування математичних моделей її у вигляді періодично корельованих та названих уже споріднених з ними випадкових процесів. Ці моделі реалізують згадану загальну концепцію ритміки і яко вже досить вивчені математичні об'єкти можуть бути взяті за підставу розроблення стохастичної теорії ритміки, яка буде фактично сукупністю висновків з їхніх властивостей, потрактованих як аксіоми теорії, а також обґрунтування алгоритмів статистичного аналізу конкретних закономірностей ритмічних процесів.

Віддавши шану індукції, узагальненню та логічному доповненню в сенсі Р. Неванлінни (див.[10]) за роллю їх при розробленні питань загальної теорії ритміки, покажімо тепер, як працює в ній аналіз – в ідейному сенсі реалізація наведеної першої тези Голмоша, даючи нові знання і відкриваючи нові засоби практичного аналізу як наслідок накладання обмежень на загальну модель ритміки.

Історію питання можна б почати з того, що ще Г. Герд у своїй дисертації [14] як приклад явища, для опису й аналізу якого треба скористуватись такими засобами, як періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП), наводить турбулентність, трактуючи її як вираз пульсівної випадковості фізичного процесу. Але він не став деталізувати подробиці і обмежився дослідженням загальної ПКВП – моделі у разі гільбертовості цього випадкового процесу, тобто скінченності дисперсій усіх випадкових величин – його значень (пригадаємо, що ЕТСС вивчає ширший клас процесів, коли дисперсія їхніх значень скінченна майже скрізь, що забезпечує застосовність для аналізу таких процесів методів функційних гільбертових просторів).

І зараз уже зовсім дивно виглядає, що ніхто дотепер (не тільки Герд, а й сам автор) не здогадався дослідити як придатну до опису пульсацій таку специфічну модель, яку дає накладання на ПКВП (його коваріацію) додаткової вимоги, щоб вона була факторизованою, тобто поданою як добуток двох функцій: перший множник його мав би змінювати інтенсивність процесу, а другий – описувати незмінність його імовірнісного режиму подібно до коваріації стаціонарного процесу. Та й термін “інтенсивність” як енергетична характеристика пов’язаний із ЕТСС. Ця обставина певною мірою пояснює позицію Герда, що вивчав тільки гільбертові випадкові процеси.

З іншого боку, треба наголосити, що подібні процеси вивчалися Р. Сільверманом, який дав означення такого типу процесів, назвавши їх локально стаціонарними, а також Й. Міхалеком за умови гільбертовості (див. [10]). Зрозуміло, що ЕТСС дала засоби узагальнити їхні результати і надати їм природної довершеності. Очевидно, що, на жаль, без пов’язання з проблемою ритміки.

Здивування автора посилює той факт, що потрібний матеріал поміщено у монографії [10] (розділ 4 і головню розділ 6) поряд і що автор аж тепер повертає свій борг. У п. 6.3 книжки [10] автор, не будучи ще знайомим з оглядом [15], де показано потребу використання згаданого класу процесів у практично важливих ситуаціях і наведено різні невдалі, вживані в літературі (в розвиток назви Сільвермана чи всупереч їй) нові назви, аргументує назву ізостаціонарно корельовані випадкові процеси (ІКВП), враховуючи явно сформульовані вимоги до функції двох змінних, щоб вона була коваріацією і щоб перший її множник описував повільну зміну в часі коваріації процесу, тобто змінювався повільніше, ніж другий, що для виконання цих умов коваріація ІКВП має допускати факторизацію вигляду.

$$r(t, s) = a \left(\frac{t + s}{2} \right) R(t - s), \quad (3)$$

де $a()$ – невід’ємна функція (це впливає з того, що дисперсія процесу $a(t) = r(t, t) = a(t)R(0) \geq 0$), а $R()$ – додатньо означена подібно до коваріації стаціонарного випадкового процесу, як у формулі (2).

Підкреслимо, що такий вираз коваріації ІКВП достосовується до потреби виправдати (нехай із певними натяжками і модифікаціями умов) методи теорії стаціонарних випадкових процесів. А це якраз і означає, що треба вимагати, щоб ІКВП мав сталі кореляційні зв’язки його значень (незалежні від вибору початку відліку), що їх дає другий множник, і змінну інтенсивність, що її описує модульована функція, яка тому має змінюватись набагато повільніше за кореляційний множник.

Таке тлумачення підкріплюється формальними викладками, якщо зауважити, що аргументи цих множників є координатами Слуцького, отримуваними заміною (переходом до нових змінних),

заведеною Є. Слуцьким, яка формалізується використанням матриці заміни $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, тобто

як $B \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, що дає співвідношення $r(v + \frac{u}{2}, v - \frac{u}{2}) = a(v)R(u)$.

А це означає повне розділення змінних і є підставою згаданої інтерпретації. Та, на жаль, функція $c(u, v) = r(v + \frac{u}{2}, v - \frac{u}{2})$ не є традиційно використовуваною для опису кореляційних зв’язків. Тому постає проблема поєднання теорії ПКВП із теорією ІКВП, що породжує нову модель – періодично ізостаціонарних випадковий процес (ПКІВП) як спеціальну часткову модель ритміки.

Із формул (1) і (3) легко вивести, що коваріація ПКІВП має мати вигляд (3) з додатковою умовою, коли $a(\cdot)$ – періодична періоду T функція. Оскільки ПКІВП є перетином у теоретико-множинному сенсі класів ІКВП та ПКВП яко підкласів класу π , то до таких процесів застосовні методи дослідження і методи стохастичного аналізу обох названих класів. Та це вже окреме питання.

Висновки

Етапи розв’язання проблеми математичного й алгоритмічно-програмного забезпечення комп’ютерних систем, як бачить їх автор, сформулювались упродовж багаторічних досліджень, зорієнтованих на практичне залучення обчислювальних засобів, проілюстровано прикладом досліджень автора, його учнів та колег з предметної області стохастичних коливань і ритміки природних явищ, що спричинило становлення в ній стохастичної парадигми в доповнення до детерміністичної області, найближче йому знайомої, і разом пережитої історії започаткування й розроблення її понятійно-аналітичного апарату, загальної моделі, адаптації до конкретної ситуації чи створення адекватних їм парсемонних (ощадних) моделей.

Із результатів досліджень впливають такі висновки:

Наведене експозе такого бачення підкреслює, що моделі були б нереалізовані без залучення понять теорії сигналів та комп’ютики для опрацювання даних (Datenverarbeitung, data processing), акцентує також на актуальність опрацювання усіх етапів дослідження. Але тут, як завжди, справедлива сентенція: «щоб область діяльності була життєздатною, конечні зусилля на всіх етапах – укріплювати підмурівок й водночас зводити всю будівлю. Основою МАПР – забезпечення є модель. Вона має бути математичною, щоб уможливити використання формалізованих засобів розділу математики, об’єктом якого вона є. При побудові її має поєднуватись політ наукової фантазії з майстерністю виконання у згоді з відомим принципом Д. Пої (Polya) математичної творчості, «щоб довести теорему, треба здогадатись, що вже має існувати, і ще раз здогадатись, як її довести».

Результати здогаду мають бути піддані строгому логічному аналізу (для забезпечення логічної коректності висновків з них). Як наголошує відомий дослідник Р. Белман: «Логіка врешті-решт є одним із способів, винайдених людським розумом для розв’язування певних задач. Але

математика більш, ніж логіка. Це – логіка плюс процес творчості. Те, яким чином закони й поняття логіки, що стають знаряддям математики, використовують для отримання результатів, навряд чи є логічним процесом, в усякому разі не більше, ніж створення симфонії чи картини».

1. Dragan Ya.P. Energy concept in the theory of non-stationary stochastic signals: representations, transformations, statistical estimation // *Latvian signal processing in tern.conf.*, Apr 23-26, 1990: Riga: Zinne, 1990. – P. 32–36.
2. Драган Я.П. О периодически коррелированных случайных процессах и системах с периодически изменяющимися параметрами // *Отбор и передача информации.* – 1969. – Вып. 22. – С.27–33.
3. Драган Я.П. Случайные процессы с конечной средней мощностью, их спектры и гармонизуемость // *Тез.докл. 2-й Вильнюс. конф. по теории вероятности и математической статистике.* – Вильнюс: изд. Ин-та математики и кибернетики АН Лит ССР, 1977, т.1. – С.133–134.
4. Драган Я.П. Гармонізованість і спектральний розклад випадкових процесів зі скінченною середньою потужністю // *Доп. АН УРСР, Сер. А.*, 1978. – №8. – С.679–684.
5. Информационные связи био-геомо-геофизических явлений и элементы их прогноза / К.С. Войчишин, Я.П. Драган, В.Н. Куксенко, В.И. Михайловский. – К: Наукова думка, 1974. – 208с.
6. Драган Я.П., Яворський І.М. Опис ритміки морського хвилювання // *Вісник АН УРСР*, 1977. №2. – С.26–36.
7. Драган Я.П., Яворский И.Н. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы. – К.: Наукова думка, 1982. – 248с.
8. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа океанологических явлений. – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 319с.
9. Драган Я.П. Енергетична концепція як підсумок та основа сучасної лінійної теорії стохастичних сигналів // *Фізичний збірник Наук.т-ва ім. Т. Шевченка у Львові*, 1993. – С.222–233.
10. Драган Я. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів. – Львів: Центр стратегічних досліджень екобіотехнічних систем, 1997. – 361с.
11. Gardner W.A., Napolitano A., Paura L. Cyclostationarity: Half a century of research // *Signal Processing*, 2006, №86. – P.639–697. www.EsevierComputerScience.com
12. Коронкевич О. І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // *Записки Львів. ун-ту ім.Ів.Франка*, 1957, Ч.44. – №8. – С.175–183.
13. Драган Я.П. Феномен Слуцького і корені системного аналізу проблеми обґрунтування стохастичних моделей ритміки // *Комп'ютерні технології друкарства.* – 2005, №14. – С.89–118.
14. Travino G. An heuristic overview of nonstationarity // *Proc. Of the workshop on Nonstationary stochastic processes and their applications*, Hampton, Virginia Aug.1-2, 1991, Singapore at all: World scientific, 1992. – H.48–61.
15. Hurd H.L. An investigation of periodically correlated stochastic processes. Ph. D. diss., Duke univ., North Carolina, 1969.