УДК 528.21/22

О. М. МАРЧЕНКО[1], С. С. ПЕРІЙ[1], О. В. ЛОМПАС[2], Ю. І. ГОЛУБІНКА[2],
Д. О. МАРЧЕНКО[2], С. КРАМАРЕНКО[1], ABDULWASIU SALAWU[2]

[1] Національний університет "Львівська політехніка", Інститут геодезії, вул. Карпінського, 6, Львів, 79013, Україна, march@pancha.lviv.ua, periy_ss@ukr.net,
[2] Генеральна комісія з обстеження, Головне управління геодезії, вул. Olaya, Ер-Ріяд, Саудівська Аравія. lompasalex@gmail.com, iurii.golubinka@gmail.com, dmitriy.marchenko@gmail.com, a.salawu@gcs.gov.sa

https://doi.org/10.23939/jgd2019.02.005

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕНЗОРА ШВИДКОСТЕЙ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ДЕФОРМАЦІЙ В ЗАХІДНІЙ УКРАЇНІ

Дані GNSS спостережень (CORS) із 37 станцій, розташованих у районі Західної України, оброблено за допомогою модуля Bernese Processing Engine (BPE) Бернського програмного забезпечення GNSS версії 5.2 протягом періоду близько 2,5 року. Щоб досягти кращої згоди, вибрали станції IGS, найближчі до навколишнього району дослідження, із фіксованими координатами ITRF2008 в епоху 2005.0. Східна та північна складові швидкості спостережень GNSS із цих 37 постійних станцій, обчислені за результатами вимірювань GNSS, використано для побудови двовимірної моделі поля горизонтальних деформацій цієї місцевості. Це дослідження подано у трьох частинах. По-перше, проаналізовано два точних рішення для компонентів 2D тензора швидкостей деформацій, отриманих на геосфері на основі розв'язання власних величин – задачі власних векторів, ураховуючи симетричний тензор швидкості обертання. По-друге, на основі найпростіших і найкорисніших формул з першого етапу здійснено строге оцінювання точності компонентів 2D тензора швидкостей деформацій на основі правила поширення коваріацій. Нарешті, обчислено компоненти 2D тензора швидкості деформації, швидкості дилатації та компоненти тензора рівних швидкостей в області. Для описаної області побудовано модель тензора швидкості обертання і зроблено висновок, що область дослідження слід інтерпретувати як деформовану територію. На основі обчислень із GNSS моделі цих компонентів горизонтальних деформацій встановлено норми основних значень та швидкості основних осей деформації земної кори. Щоб бути послідовним, основні тектонічні утворення покажемо як фонову інтенсивність різних компонентів швидкостей, швидкість обертання та тензори швидкості деформації. Топографічні особливості регіону ґрунтувались на моделі SRTM-3 (місія із топографії Shuttle) вз роздільною здатністю 3″×3″. На перший погляд, найбільші значення отримано в районах, розташованих навколо Українських Карпат. Швидкість дилатації також має подібний розподіл. Однак, оскільки в роботі обчислено лише власні числа та власні вектори без оцінки точності, це може призвести до сумнівних висновків щодо інтерпретації результатів і потребує додаткового розв'язання суто математичної задачі. Потрібно знайти коваріаційну матрицю тензора деформації на підставі заданої коваріаційної матриці компонентів швидкості, отриманих програмним забезпеченням Bernese. Оскільки досліджуваний регіон дуже складний, то за одержаними результатами необхідне подальше ущільнення перманентних станцій GNSS.

Ключові слова: тензор швидкостей горизонтальних деформацій; швидкість дилатації; тензор швидкостей максимального зсуву; оцінювання точності.

Вступ

Деформації земної поверхні відображають процеси глибинної динаміки Землі, які виникають унаслідок поступово-обертового руху планети в просторі. Їх класифікують і згідно із їх змінами в часі, так і за розподілом на різноманітні просторові зміщення. Зокрема, вони можуть бути віковими, періодичними та епізодичними, а крім того, розрізняють глобальні, регіональні та локальні деформації. Наші знання про рухи земної поверхні істотно залежать від їх природи та періоду визначення деформацій, отриманих за даними різноманітних вимірів [Minster, Jordan, 1978; DeMets, et al., 1990; DeMets, et al., 1994; England, Molnar, 1997; Kreemer, 2000; Crespi, et al., 2000; Bird, 2003, та ін.]. Традиційним підходом у дослідженні деформацій земної поверхні є вивчення горизонтальних та вертикальної складових поля деформацій на основі технологій супутникової геодезії, що забезпечило можливість моніторингу і вивчення тривимірного поля деформацій за допомогою таких сучасних методів: VLBI (Very Long Baseline Interferometers) – радіоінтерферометрії із наддовгою базою; SLR (Satellite Laser Ranging) – лазерної локації супутників; DORIS (Doppler Orbitography and Radio-positioning

Integrated by Satellite) – допплерівської орбітографії; GNSS (Global Navigation Satellite System) – глобальних позиційних систем та InSAR (Interferometric Synthetic Aperture Radar). Розвиток цих технологій неможливий без точного визначення і реалізації земної системи координат для вивчення деформації земної поверхні, що відображено, наприклад, у IERS Conventions 2010 [Petit, Luzum, 2010]. Із перелічених методів саме GNSS технології відіграють головну роль у вивченні деформації земної поверхні за рахунок їх мобільності та точності. Для розв'язування такої задачі в регіоні Західної України є достатньо щільна мережа GNSS станцій.

Проблема, що обговорюється, належить до фундаментальних проблем сучасної геодинаміки і пов'язана із дослідженням просторово-часової зміни деформаційних полів і сучасних рухів земної кори та їхніх особливостей, зумовлених тектонічними причинами, аналізуванням багаторічних GNSS спостережень у різних регіонах світу. Отже, планується широке застосування експериментального вивчення деформацій із використанням новітніх GNSS технологій та деформаційного моніторингу в геофізичних процесах. Визначення деформацій земної поверхні, яких щорічно стосується дуже велика кількість наукових праць, традиційно ґрунтується на математичному апараті, який має тензорну природу. В результаті виконання таких робіт уможливлюється обчислення 2D [Marchenko, et al., 2010] і 3D [Marchenko, 2003] тензора швидкостей деформацій зі строгою оцінкою точності [Marchenko, 2003], аналізування поля деформацій, побудови математичної моделі тектонічно активних розломних зон. Таке вивчення деформаційних процесів за допомогою GNSS спостережень приводить до уточнення відомих тектонічних плит.

Як буде показано нижче, необхідною умовою для аналізу змін земної поверхні є знаходження часткових похідних векторних функцій поля швидкостей деформацій. В ідеальному випадку ці функції повинні бути заданими неперервно у просторово-часовій області, однак цього не досягають геодезичними вимірами, природа яких дискретна як у просторі, так і в часі. Оскільки сучасні рухи земної поверхні визначаються насамперед через геодезичні виміри, то і їхня природа дискретна. З цієї причини неперервну в просторі й часі необхідну інформацію потрібно оцінювати, апроксимуючи невідомі функції за відомим дискретним розподілом, а це проблема, яка не має єдиного розв'язку і вирішується, як правило, або методом скінченних елементів, або методом середньої квадратичної колокації [Julliette, et al., 2006].

Отже, у розділах 2–4 зосередимось на аналізі вихідних даних, виборі відомих точних формул для обчислення компонент 2D тензора швидкостей деформацій на основі розв'язування задачі на власні числа та власні вектори. Подано згідно з [Marchenko, et al., 2010] строгу оцінку точності компонент 2D тензора швидкостей деформацій на підставі правила перетворення коваріацій та виконано обчислення компонент 2D тензора швидкостей деформацій, швидкості дилатації та тензора швидкостей максимального зсуву для регіону Західної України.

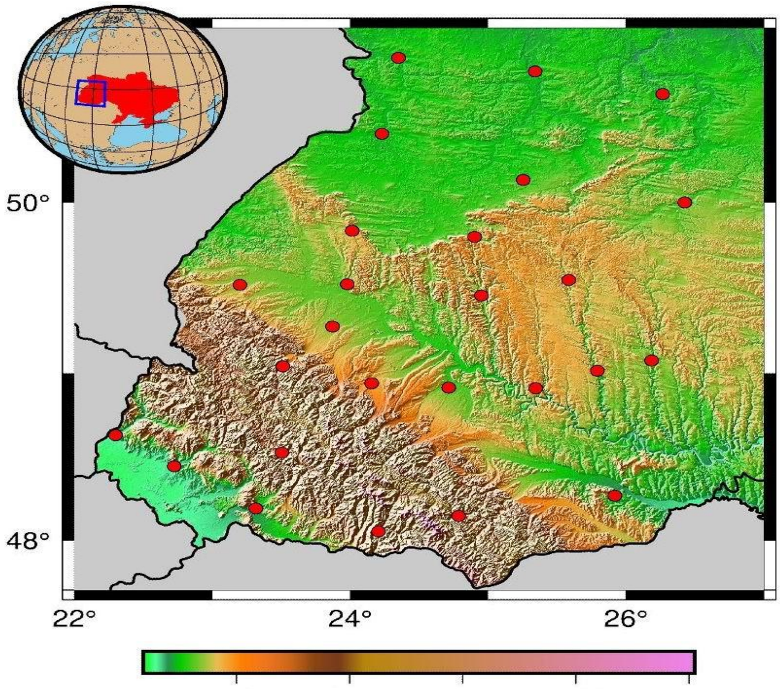

Рис. 1. Розподіл 26 станцій GNSS та топографічні висоти за моделлю STRM-3, м

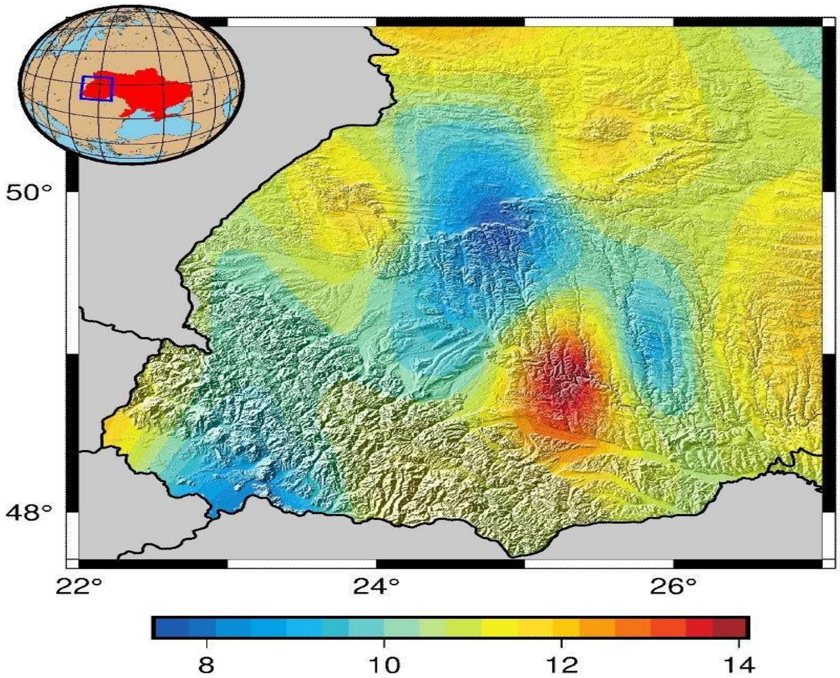

Рис. 2. Східна компонента V_E поля лінійних швидкостей у системі ITRF2008 на епоху 2005.0, мм/рік

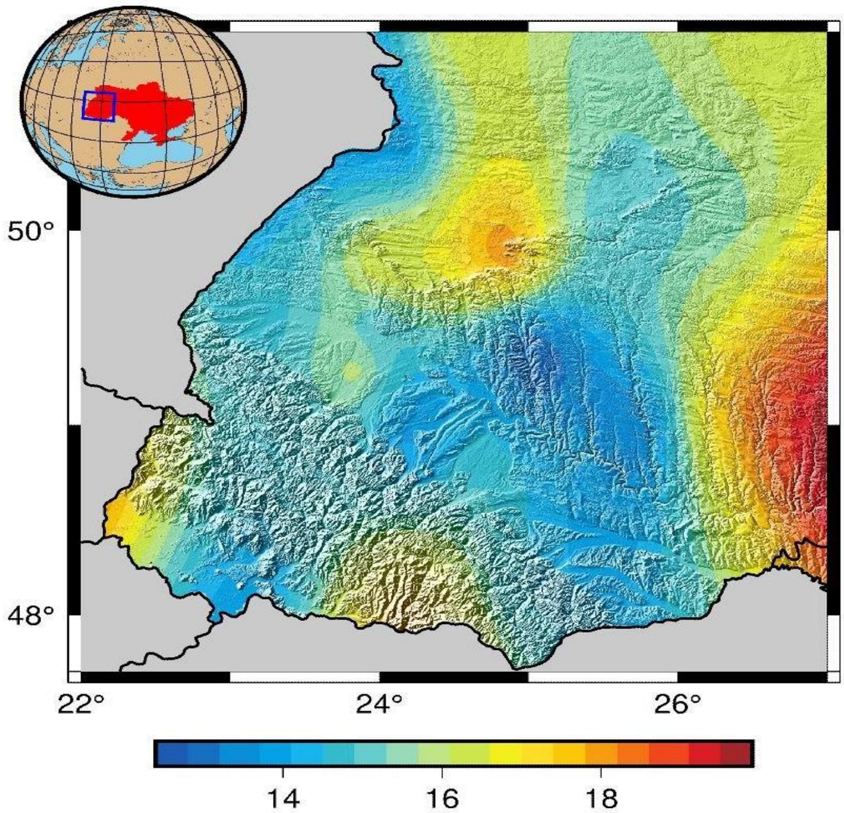

Рис. 3. Північна компонента V_N поля лінійних швидкостей у системі ITRF2008 на епоху 2005.0, мм/рік

Тензор швидкості деформацій і тензор швидкості обертання

Зупинимось тепер на загальних рівняннях визначення тензорів горизонтальних швидкостей деформацій і обертання на поверхні сферичної Землі за геодезичними та іншими даними. Вважатимемо, що для кожної станції нам відома така інформація: вектори прямокутних координат (x_j, y_j, z_j) і відповідних швидкостей (V_x^j, V_y^j, V_z^j) руху геодезичних пунктів у системі ITRF. Перехід до геоцентричних координат (φ_j, λ_j, R) виконується добре відомим способом, а до відповідних компонент швидкостей (V_N^j, V_E^j, V_r^j) – за таким правилом

$$\mathbf{V}_{\mathrm{NEU}} = \mathbf{R}_{\varphi\,\lambda} \cdot \mathbf{V}_{xyz}\,, \tag{1}$$

де матрицю повороту $\mathbf{R}_{\varphi\,\lambda}$ переходу від глобальної правої до топоцентричної лівої системи координат NEU із напрямом осей “Північ–Схід–Верх” легко отримати в формі

$$\mathbf{R}_{\varphi\,\lambda} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{NEU}} = \left[V_N^j,\ V_E^j,\ V_r^j\right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{V}_{xyz} = \left[V_x^j,\ V_y^j,\ V_z^j\right]^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

Тепер, якщо припустити, що досліджувані деформації є нескінченно малими, відповідний тензор другого ступеня можна адитивно розкладати на нескінченно малий тензор ε_{ij} швидкості деформацій і тензор швидкості обертання ω_{ij} (завихреності).

Згідно із Hains, Holt (1993) поле горизонтальної швидкості деформацій може бути інвертовано, якщо відома функція $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ вектора обертання, яка відображає безперервне горизонтальне поле швидкості на сфері:

$$\mathbf{v} = R\left[\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}}) \times \tilde{\mathbf{r}}\right], \tag{4}$$

де R – радіус Землі; $\mathbf{r}$ – одиничний радіальний вектор. Рівняння (4) має вирішальне значення у теорії Hains, Holt (1993) і дає змогу однозначно визначити горизонтальне поле швидкості на сфері. Отже, компоненти тензора швидкості деформацій [Haines, Holt, 1993; Kreemer, 2000] для 2D-простору мають таку форму:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\lambda\,\lambda} &= \frac{\tilde{\mathbf{n}}}{\cos\varphi}\frac{\partial\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial\lambda} + \frac{V_r}{R} = \frac{\tilde{\mathbf{n}}}{\cos\varphi}\frac{\partial\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\,\varphi} &= -\tilde{\mathbf{e}}\frac{\partial\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial\varphi} + \frac{V_r}{R} = -\tilde{\mathbf{e}}\frac{\partial\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial\varphi}, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\,\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{n}}\frac{\partial\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial\varphi} - \frac{\tilde{\mathbf{e}}}{\cos\varphi}\frac{\partial\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial\lambda}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

де V_r – швидкість у радіальному напрямку; $\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})$ – векторна функція обертання вибраної тектонічної плити, що розглядається як тверде тіло.

Розглянемо дві точки $\mathbf{r} = (R, \varphi, \lambda)$ і $\mathbf{r}_0 = (R, \varphi_0, \lambda_0)$ на сферичній Землі радіуса R із локальними напрямками $(\tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{r}})$ і $(\tilde{\mathbf{n}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0)$ на північ, схід і по вертикалі вверх:

$$\tilde{\mathbf{n}} = \left[-\sin\varphi\cos\lambda,\ -\sin\varphi\sin\lambda,\ \cos\varphi\right], \tag{6}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \left[-\sin\lambda,\ \cos\lambda,\ 0\right], \tag{7}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \left[\cos\varphi\cos\lambda,\ \cos\varphi\sin\lambda,\ \sin\varphi\right]. \tag{8}$$

Формули (6)–(8) дають явні вирази для одиничних векторів $(\tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{r}})$ у північному, східному та вертикальному напрямах. У першому наближенні лінійну швидкість $\mathbf{v}$ у точці $\mathbf{r}$ можна виразити через тензор швидкостей деформацій $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{r})$, записаний за допомогою оператора Гамільтона ∇ (Ward, 1998):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)\,. \tag{9}$$

Якщо виконується припущення, що рухи відбуваються у дотичній до сфери площині за відомого зв’язку між лінійною та кутовою швидкостями

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}\,, \tag{10}$$

то, з урахуванням (10), вираз (9) просто трансформується до співвідношення

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\left[\nabla\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0\right]. \tag{11}$$

Перший член (11) описує обертання навкруги полюса $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_0)$, тензор $\left[\nabla\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0\right]$ легко розділяється на тензор $\mathbf{S}_V(\mathbf{r}_0)$ швидкостей деформацій і додатковий тензор обертання $\mathbf{R}_V(\mathbf{r}_0)$. Зрозуміло, якщо $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$, то $\nabla\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_0) = 0$ і тензори $\mathbf{S}_V(\mathbf{r}_0)$ та $\mathbf{R}_V(\mathbf{r}_0)$ не визначаються. Для переходу від тривимірного простору до двовимірного – поверхні сфери достатньо обмежити залежність $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ двома координатами

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega}(\varphi, \lambda)\,, \tag{12}$$

тобто кутова швидкість є функцією лише сферичних координат. Тоді тензори $\mathbf{S}_V(\mathbf{r}_0)$ швидкостей деформацій і обертання $\mathbf{R}_V(\mathbf{r}_0)$ набувають форми (6) і (7), якщо вектор швидкості $\mathbf{v} = \left[V_N, V_E\right]^{\mathrm{T}}$ є композицією північної та східної компонент.

Нижче знехтуємо складовою V_r швидкості в радіальному напрямку і можемо на основі відомих швидкостей у вершинах полігона, суміщених із геодезичними станціями, виконати оцінювання тензора деформацій. Нехай вектор $\left[V_N^j,\ V_E^j\right]^{\mathrm{T}}$ являє собою або швидкості, або їх остаточні значення (наприклад, – після видалення впливу загальноприйнятої моделі NUVEL–1A) в j геодезичних пунктах у північному та східному напрямах топоцентричної системи координат. За припущення, що невідомі параметри можна розглядати як нескінченно малі величини, такий підхід дає змогу просто отримати елементи симетричного тензора $\mathbf{S}_V$ швидкостей деформацій:

$$\mathbf{S}_V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_N}{\partial \varphi} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_N}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_E}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_N}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_E}{\partial \varphi}\right) & \frac{\partial V_E}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} & \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda} \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda} & \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

й антисиметричного тензора – градієнта $\mathbf{R}_V$ швидкостей

$$\mathbf{R}_V = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_N}{\partial \lambda} - \frac{\partial V_E}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_N}{\partial \lambda} - \frac{\partial V_E}{\partial \varphi}\right) & 0 \end{bmatrix} = \dot{\omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

де $\dot{\omega}$ – швидкість обертання області, яку вважаємо твердим тілом. Очевидно, що швидкість обертання тут прийнята як функція сферичних координат. Тоді тензор швидкості деформації $\mathbf{S}_V$ і тензор швидкості обертання $\mathbf{R}_V$ задаються формулами (13) і (14), якщо вектор швидкості $\mathbf{v} = [V_N, V_E]^{\mathrm{T}}$ складається із північних і східних компонентів.

Крім того, пружні властивості тектонічної пластини можна моделювати через просторові похідні функції $\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})$, які дорівнюють нулю у (5) для таких ділянок, які розташовані на одній пластині, що приводить до обов'язкового її визначення. Всі геодезичні та геологічні дані потребують попереднього опрацювання та прогнозу у вузли вибраної рівномірної сітки для визначення похідних, які входять у формули (5)–(14). Крім того, твердість тектонічної плити може моделюватися через просторові похідні від функції $\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})$, які дорівнюють нулю у (5) для таких регіонів, що лежать на тій самій плиті й мають ту саму функцію $\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}})$ або полюс Ейлера. Тобто будь-яка область, для якої $\mathbf{\Omega}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathrm{const}$, трактується як регіон, що не деформується.

Розв'язування задачі на власні числа і власні вектори та оцінювання точності

Тепер виконаємо аналіз відомих версій задачі знаходження власних чисел і власних векторів симетричного тензора – градієнта $\mathbf{S}_V$ поданого виразом (13), щоб вибрати оптимальні формули для подальшої оцінки точності. За відомим визначенням інваріанти матриці можна просто обчислити за допомогою таких формул

$$I_1 = \mathrm{Trace}(\mathbf{S}_V) = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} = 2\dot{\chi}, \quad (15)$$

$$I_2 = \mathrm{Det}(\mathbf{S}_V) = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} - \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}^2, \quad (16)$$

і використати для розв'язання характеристичного рівняння

$$\Lambda^2 - I_1\Lambda + I_2 = 0. \quad (17)$$

Після знаходження інваріантів I_1 і I_2 власні значення матриці (5) або корені $\Lambda_1 > \Lambda_2$ відповідного квадратного рівняння (17) набувають такої форми

$$\Lambda_1 = \frac{I_1 + \upsilon}{2} = \dot{\chi} + \upsilon/2, \quad \Lambda_2 = \frac{I_1 - \upsilon}{2} = \dot{\chi} - \upsilon/2, \quad (18)$$

де $\upsilon = \Lambda_1 - \Lambda_2$ – різниця коренів рівняння (17) або так звана швидкість максимального зсуву, яку визначають на основі інваріантів (15) і (16) і відповідних елементів тензора швидкості деформацій. Підставивши Λ_1 і Λ_2 у рівняння для $\upsilon = \Lambda_1 - \Lambda_2$, отримуємо

$$\upsilon = \sqrt{I_1^2 - 4I_2} = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda})^2 + 4\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}^2}. \quad (19)$$

Очевидно, що дві головні осі – це такі напрямки тензора швидкості деформацій, які характеризують максимальну і мінімальну осі, що відповідають розширенню Λ_1 і стисканню Λ_2 деякої вибраної певної області дослідження і можуть бути знайдені на основі відомих значень Λ_1 і Λ_2. Зазвичай проблему власного вектора вирішують у цифровій формі.

Проте обговоримо й інший підхід. Відтепер власні значення (18), які відповідають певним векторам, можна знайти разом з напрямками власних векторів у замкнутій формі, що необхідно для подальшої оцінки точності всіх складових задачі на власні значення – власні вектори. Для цього нагадаємо спочатку, що головні осі нашого тензора (13) збігаються із основними напрямками так званого тензор-девіатора, який визначається не тільки симетричними властивостями тензора швидкості деформацій (13), але і нульовим слідом $\mathrm{Trace}(\mathbf{S}_V)$. Наприклад, серед інших типів тензорів-девіаторів, які вже вивчено із погляду виведення аналітичних розв'язків задачі на власні значення – власні вектори, є тензор інерції Землі й добре відомий із місії GOCE тензор гравітаційного градієнта [див., наприклад, Moritz, Muller, 1987; Marchenko, Schwintzer, 2003; Marchenko, 2003; Marchenko, et al., 2016]. Підходячи до відповідного перетворення тензора (13) через $\mathrm{Trace}(\mathbf{S}_V)$ до девіатора $\mathbf{D}_V$, його легко знайти:

$$\mathbf{S}_V = \mathbf{D}_V + \frac{\mathrm{Trace}(\mathbf{S}_V)}{2},$$

$$\mathbf{D}_V = \mathbf{S}_V - \frac{\mathrm{Trace}(\mathbf{S}_V)}{2} = \mathbf{S}_V - \dot{\chi}, \quad (20)$$

що забезпечує шукану матрицю – девіатор $\mathbf{D}_V$:

$$\mathbf{D}_V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} & 2\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda} \\ 2\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda} & \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} - \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Розв'язок задачі на власні числа і власні вектори для девіатора (21) дуже простий, оскільки інваріанти набувають таких значень

$$i_1 = \mathrm{Trace}(\mathbf{D}_V) = 0,$$

$$i_2 = \mathrm{Det}(\mathbf{D}_V) = -\left[(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda})^2/4 + \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}^2\right], \quad (22)$$

що уможливлює розв’язання відповідного квадратного рівняння і знаходження як його коренів, так і відновлених коренів вихідного рівняння (17):

$$\lambda^2 + i_2 = 0,$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda})^2/4 + \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}^2} = \pm\upsilon/2, \qquad (23)$$

$$\left.\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{matrix}\right\} = \dot{\chi} + \left\{\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \dot{\chi} + \begin{cases}\upsilon/2\\ -\upsilon/2\end{cases}. \qquad (24)$$

Формули (20)–(24) матимуть найважливіше практичне значення після об’єднання усіх наведених перетворень для приведення тензора $\mathbf{S}_V$ у таку форму

$$\mathbf{S}_V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\chi} - \dot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_2\\ \dot{\gamma}_2 & \dot{\chi} + \dot{\gamma}_1\end{bmatrix}, \qquad (25)$$

де прийнято такі позначення

$$\dot{\chi} = (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda})/2, \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} - \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi},$$
$$\dot{\gamma}_2 = 2\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}, \qquad (26)$$

для швидкості середнього розширення (стиснення) поверхні регіону $\dot{\chi}$ або швидкості дилатації та компонент $\dot{\gamma}_1$ і $\dot{\gamma}_2$ загальної швидкості зсуву $\dot{\gamma}$ досліджуваного району. Зрозуміло, що швидкість $\dot{\gamma}$ просто визначити на основі компонент $\dot{\gamma}_1$ і $\dot{\gamma}_2$:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}. \qquad (27)$$

Отже, серед співвідношень (5), (20) і (25) останнє подання тензора $\mathbf{S}_V$ стає особливо важливим, оскільки дає змогу отримати розв’язок характеристичного рівняння (17) для тензора (25) у найзручнішій формі

$$\left.\begin{matrix}\Lambda_1 = (\dot{\chi} + \dot{\gamma})/2\\ \Lambda_2 = (\dot{\chi} - \dot{\gamma})/2\end{matrix}\right\}. \qquad (28)$$

Іноді для вивчення поля деформацій використовують так званий максимальний зсув $\upsilon = \Lambda_1 - \Lambda_2$ [Vaníček et al., 2008] як інваріантну характеристику у вигляді (19). Неважко отримати на основі (28), що $\upsilon = \dot{\gamma}$ і зауважити, що ці поняття алгебраїчно ідентичні у випадку тензора деформацій, який розглядається у двовимірному просторі.

Розглянемо тепер, як знайти положення власних векторів. Оскільки власні значення Λ_1 і Λ_2 тензора (5) або (25) відповідають власним векторам $\mathbf{\Lambda}_1$ і $\mathbf{\Lambda}_2$, то останні можна знайти як нетривіальний розв’язок однорідної (сингулярної) системи алгебраїчних рівнянь

$$(\mathbf{S}_V - \Lambda_j\mathbf{I})\cdot\mathbf{\Lambda}_j = 0. \qquad (29)$$

де $\mathbf{I}$ – (2×2) – одинична матриця. Розглянемо матрицю системи (29) у векторній формі

$$\mathbf{S}_V - \Lambda_j\mathbf{I} = \left[\mathbf{s}_1 - \Lambda_j\mathbf{e}_1,\ \ \mathbf{s}_2 - \Lambda_j\mathbf{e}_2\right], \qquad (30)$$

де кожний допоміжний вектор $\mathbf{s}_i$ представляє i-й стовпчик матриці $\mathbf{S}_V$:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\chi} - \dot{\gamma}_1\\ \dot{\gamma}_2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\gamma}_2\\ \dot{\chi} + \dot{\gamma}_1\end{bmatrix}, \qquad (31)$$

а $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ – одиничні вектори прийнятої горизонтальної локальної системи координат.

Отже, система лінійних рівнянь (29) забезпечує такі дві умови ортогональності

$$(\mathbf{s}_i - \Lambda_j\mathbf{e}_i,\ \mathbf{\Lambda}_j) = 0, \quad (i = 1,2),$$
$$(j = \mathrm{const}). \qquad (32)$$

Отже, кожний власний вектор $\mathbf{\Lambda}_j$ буде нормальним до такої площини, в якій розміщені всі допоміжні вектори $\mathbf{s}_i - \Lambda_j\mathbf{e}_i$ для кожного фіксованого $j = \mathrm{const}$. Трансформація матриці $\mathbf{S}_V - \Lambda_j\mathbf{I}$ у систему головних осей ($\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$) приводить до співвідношення

$$\mathbf{S}_V - \Lambda_j\mathbf{I} \Rightarrow \begin{pmatrix}\Lambda_1 - \Lambda_j & 0\\ 0 & \Lambda_2 - \Lambda_j\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rank}(\mathbf{S}_V - \Lambda_j\mathbf{I}) = 1 \text{ де } \Lambda_1 > \Lambda_2, \qquad (33)$$

для кожного j=1, 2.

Результат (33) відображає такий факт: існує лише один лінійно незалежний вектор на множині $\mathbf{s}_i - \Lambda_j\mathbf{e}_i$ за кожного фіксованого j=1, 2. Отже, отримаємо власний вектор $\mathbf{\Lambda}_j$ як векторний добуток відповідних лінійно незалежних векторів $\mathbf{s}_i - \Lambda_j\mathbf{e}_i$. Найефективніший і найпростіший розв’язок можна сформувати за аналогією із тривимірним випадком [Marchenko, 2003], обчисливши такий векторний добуток

$$\mathbf{Z}_j = (\mathbf{s}_1 - \Lambda_j\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{s}_2 - \Lambda_j\mathbf{e}_2), \qquad (34)$$

якій після стандартної нормалізації кожного вектора $\mathbf{Z}_j$ набуде такої форми

$$\mathbf{\Lambda}_j = \mathbf{Z}_j/\sqrt{(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_j)}, \qquad (35)$$

для визначення кожного власного вектора $\mathbf{\Lambda}_j$, якщо j=1, 2. Перетворення (34) дає змогу подати ненормований власний вектор у простому вигляді

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{P} + \Lambda_j\mathbf{s} + \Lambda_j^2\mathbf{e}, \qquad (36)$$

де прийнято такі позначення

$$\mathbf{P} = \mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \qquad (37)$$

Отже, отримані рівняння (35)–(37) дають строгий розв’язок задачі. Однак для тензора деформацій, що вивчається на сфері у 2D просторі, існують значно простіші залежності, які уможливлюють повне оцінювання точності власних значень і положень головних осей на основі відомого тензора деформацій і його коваріаційної матриці. Зазначимо тому, що власні значення Λ_1 і Λ_2 тензора (5) або (25) набувають у цьому випадку змісту швидкостей головних деформацій, які відповідають векторам швидкостей найбільшого $\mathbf{\Lambda}_1$ (розширення) і найменшого $\mathbf{\Lambda}_2$ (стиснення) у двох головних напрямах. В цьому випадку головні вектори характерні тим, що саме ці напрями вільні від деформацій зсуву. Азимут α_1 першої головної осі $\mathbf{\Lambda}_1$ легко обчислити за формулою (38), а азимут α_2 другого головного напряму $\mathbf{\Lambda}_2$ – визначити з умови, що головні осі перпендикулярні одна до одної

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1}\right), \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2 . \tag{38}$$

Тоді азимут $\beta = \alpha_1 + \pi/4$ напряму найбільшого зсуву відповідає бісектрисі кута між векторами найбільшого $\mathbf{\Lambda}_1$ і найменшого $\mathbf{\Lambda}_2$ розширення (стиснення). Співвідношення (38) разом із розв'язком (25)–(28) задачі на власні числа дають змогу перейти до строгого оцінювання точності знайдених параметрів.

Оцінювання точності задачі на власні числа і власні вектори

Незважаючи на важливість отриманих результатів щодо вивчення деформації земної поверхні, автори не знайшли в літературі, крім робіт [Marchenko, 2003; Marchenko et al., 2010], повного оцінювання точності розв'язку задачі на власні числа і власні вектори. Тому для повного аналізу проблеми зупинимось на зазначеному вище розв'язку строгого оцінювання точності задачі на власні числа та власні вектори.

Згідно із [Marchenko, 2003; Marchenko, et al., 2010] формули для оцінки точності задачі на власні числа і власні вектори достатньо просто отримати, якщо вихідною інформацією вибрано вектор

$$\mathbf{T} = \left[\dot{e}_{\varphi\varphi},\, \dot{e}_{\lambda\lambda},\, \dot{e}_{\varphi\lambda}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{39}$$

разом із відомою коваріаційною матрицею $\mathbf{C}_{\mathrm{TT}}$, яку визначають, будуючи поле горизонтальних швидкостей і компонент тензора деформацій на сфері. Враховуючи, що основною функціональною залежністю для обчислення власних чисел стають співвідношення (28), які ґрунтуються на векторі

$$\mathbf{t} = \left[\dot{\chi},\, \dot{\gamma}_1,\, \dot{\gamma}_2\right]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left[(\dot{e}_{\varphi\varphi} + \dot{e}_{\lambda\lambda})/2,\ \dot{e}_{\lambda\lambda} - \dot{e}_{\varphi\varphi},\ 2\dot{e}_{\varphi\lambda}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{40}$$

поданому тут за допомогою (26), виникає додаткова задача попереднього оцінювання точності компонент вектора $\mathbf{t}$.

Починаючи з цієї задачі, використовуватимемо правило перетворення коваріацій, для якого у випадку (41) необхідно знайти матрицю часткових похідних від компонент вектора $\mathbf{t}$ за компонентами вихідного вектора $\mathbf{T}$. В результаті процедури диференціювання знаходимо (3×3) – матрицю часткових похідних

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

що дає можливість визначити повну коваріаційну матрицю $\mathbf{C}_{\mathrm{tt}}$ вектора $\mathbf{t}$ (40), застосувавши правило перетворення коваріацій

$$\mathbf{C}_{\mathrm{tt}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{TT}} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{42}$$

Перед оцінюванням точності вектора власних чисел

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\Lambda_1,\ \Lambda_2\right]^{\mathrm{T}}, \tag{43}$$

згадаємо, що кожне власне число можна подати залежністю від двох параметрів – швидкості дилатації $\dot{\chi}$ і швидкості загального зсуву $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2)^{1/2}$. Оскільки оцінку точності дилатації $\dot{\chi}$ та компонент зсуву обчислюють на основі (42), то дисперсію $\mathrm{var}(\dot{\gamma})$ параметра $\dot{\gamma}$ знайдемо у такій формі

$$\mathrm{var}(\dot{\gamma}) = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{C}_{\mathrm{tt}} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{t}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{TT}} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{t}} = \left[0,\ \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}},\ \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}}\right]. \tag{44}$$

Після диференціювання вектора (43) знаходимо (2×3) – матрицю часткових похідних від вектора $\boldsymbol{\lambda}$ власних чисел за компонентами вектора $\mathbf{t}$ (40) і повну коваріаційну матрицю $\mathbf{C}_{\lambda\lambda}$ власних чисел тензора горизонтальних деформацій на геосфері

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\dot{\gamma}_1}{2\dot{\gamma}} & \frac{\dot{\gamma}_2}{2\dot{\gamma}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\dot{\gamma}_1}{2\dot{\gamma}} & -\frac{\dot{\gamma}_2}{2\dot{\gamma}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{C}_{\mathrm{tt}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{t}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{TT}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{45}$$

Задача оцінювання точності положень головних осей фактично зводиться до визначення точності азимутів (38), які відповідають двом головним напрямам швидкостей найбільшого (розширення) $\mathbf{\Lambda}_1$ і найменшого (стиснення) $\mathbf{\Lambda}_2$ регіону. Застосовуючи правило перетворення коваріацій до першого зі співвідношень (38), отримаємо

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{t}} = \left[0\ \ -\frac{\dot{\gamma}_1}{2\dot{\gamma}}\ \ \frac{\dot{\gamma}_2}{2\dot{\gamma}}\right],$$

$$\mathrm{var}(\alpha_1) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{C}_{\mathrm{tt}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{t}}\right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{TT}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{46}$$

дисперсію азимута першого головного напряму. Неважко показати, що дисперсії азимута α_2 другої головної осі й азимута β напряму найбільшого зсуву збігатимуться, оскільки збігаються часткові похідні від цих трьох параметрів.

Визначення тензора швидкостей деформацій в регіоні Західної України

Як вихідну інформацію застосовуємо східну (рис. 2) і північну (рис. 3) лінійні швидкості, знайдені на основі безперервних GNSS спостережень 37 станцій CORS, розташованих у районі Західної України і обчислених за допомогою модуля Bernese Processing Engine (BPE) Bernese GNSS Software версії 5.2 за період близько 2.5 року. Для кращої відповідності додатково використано станції IGS, найближчі до околу місця дослідження і зафіксовані координатами ITRF2008 в епоху 2005.0. Тому ці швидкості, також пов'язані із системою ITRF2008 (епоха 2005.0), є основним джерелом нашої інформації. На основі формул (13) визначено елементи $\dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda}$, $\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$ і $\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}$ тензора швидкостей деформацій. Компоненту $\dot{\omega}$ тензора швидкості обертання (14) подано на рис. 4.

Компоненти $\dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda}$, $\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$ і $\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}$ тензора швидкості деформацій обчислено безпосередньо числовим диференціюванням в одиницях [μstrain/yr = = 10^{-6}/year]. Тоді за формулами (24)–(27) можна обчислити швидкості дилатації $\dot{\chi}$ та компоненти $\dot{\gamma}_1$ і $\dot{\gamma}_2$ тензора – девіатора швидкості максимального зсуву $\dot{\gamma}$ досліджуваного району. Зрозуміло, що максимальні та мінімальні власні числа Λ_1 і Λ_2 можна визначити за формулою (28).

Отже, ці компоненти тензора швидкості деформацій та компонента $\dot{\omega}$ тензора швидкості обертання розраховано на підставі (13) та (14) відповідно. Нехтуючи параметрами $\dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda}$, $\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$, $\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}$, подамо лише значення $\dot{\omega}$, що ілюструє рис. 4.

Рис. 5 демонструє швидкість дилатації $\dot{\chi}$ у локальній системі NEU (ITRF2008) та ілюструє розширення і стиснення в області відповідно. Рис. 6 відображає швидкість вектора $\dot{\gamma}$ максимального зсуву разом із напрямками головних деформацій, які відповідають головним деформаціям регіону $\mathbf{\Lambda}_1$ (розширення) і $\mathbf{\Lambda}_2$ (стиснення). Щоб бути послідовними, основні тектонічні утворення ми показали на всіх рис. 2–6 як фонову інтенсивність різних компонентів швидкості, тензорів швидкості обертання та швидкості деформації. Топографічні особливості регіону ґрунтувались на моделі SRTM-3 (Shuttle Radar Topography Mission) із роздільною здатністю 3″×3″.

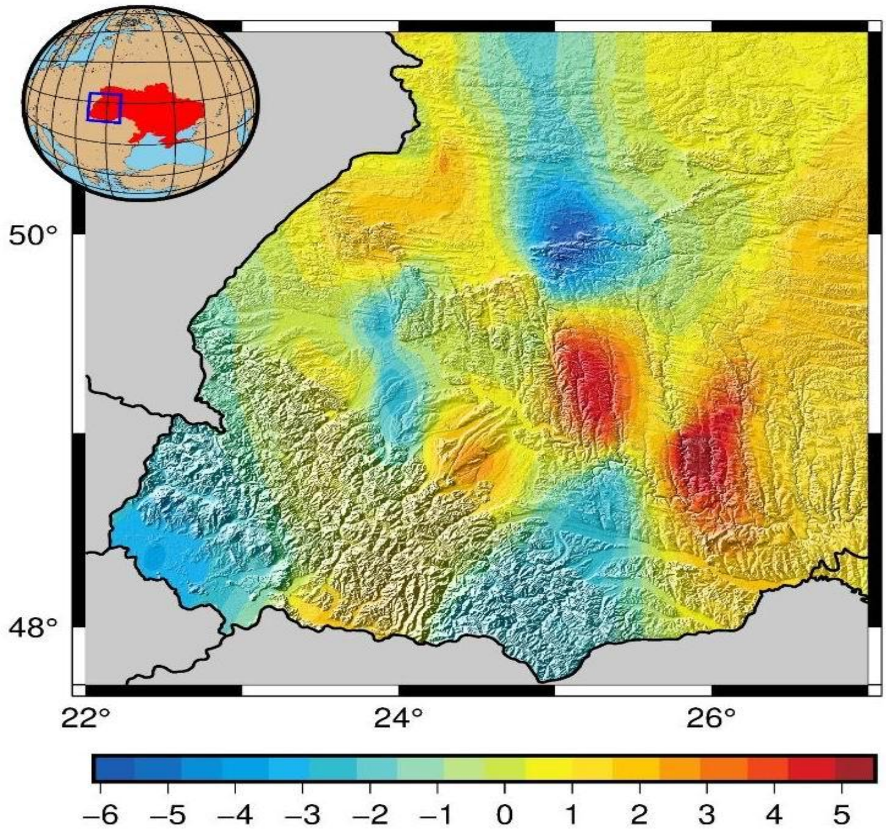

Рис. 4. Головна компонента $\dot{\omega}$ тензора швидкості обертання, 10^{-6}/рік

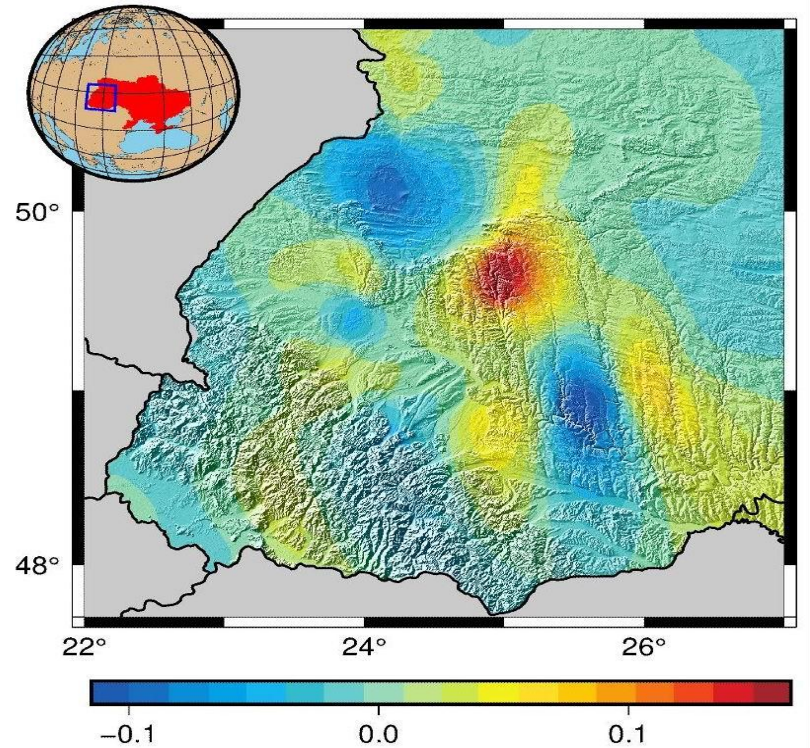

Рис. 5. Швидкість дилатації [μstrain/yr], що ґрунтується на напрямах головних деформацій, які відповідають розширенню $\mathbf{\Lambda}_1$ і стисненню $\mathbf{\Lambda}_2$

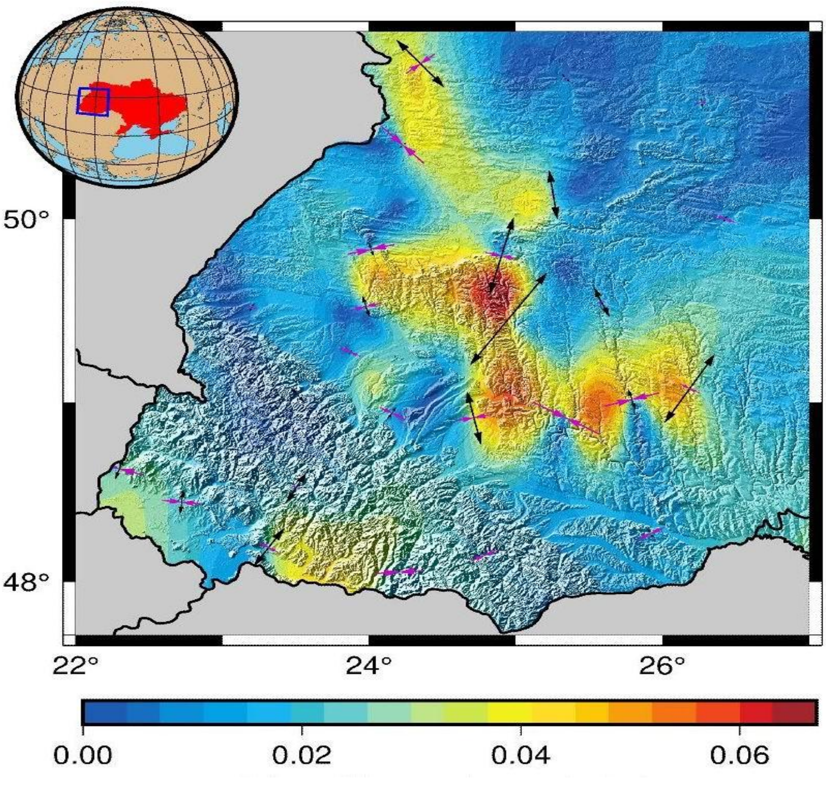

Рис. 6. Швидкості максимального зсуву [μstrain/year]; напрями головних деформацій (↔) $\mathbf{\Lambda}_1$ (розширення) і (→←) $\mathbf{\Lambda}_2$ (стиснення) регіону

Висновки

1. Спостереження із 37 станцій GNSS, розташованих у Західній Україні, оброблено за допомогою програми Bernese GNSS версії 5.2 протягом приблизно 2,5 року. Тобто розраховано координати і швидкості 37 станцій GNSS. Ці результати використано для побудови 2D-моделі горизонтальних деформацій у західній частині України, ураховуючи частину Карпатських гір.

2. Після згущення обчислено цифрову модель лінійних горизонтальних швидкостей рухів земної кори для території Західної України на регулярній сітці. Проаналізовано два відомі методи аналітичного розв'язування задачі на власні значення – власні вектори для тензора швидкості двовимірної деформації, а також проілюстровано їх ідентичність. Найпростіші формули вибрано для подальшого використання в розрахунках і строгої оцінки точності.

3. Для кращого розуміння основні тектонічні утворення показано як фонову інтенсивність різних компонентів швидкості, тензора швидкості обертання та тензора швидкості деформації. Топографічні особливості регіону ґрунтувались на моделі SRTM-3 із високою роздільною здатністю 3″×3″ (рис. 1). Побудовано модель тензора швидкості обертань $\dot{\omega}$ для регіону Західної України, яка дає підстави для таких висновків. Оскільки твердість тектонічної плити моделюється через просторові похідні від лінійної швидкості, які дорівнюють нулю для таких регіонів, що лежать на одній плиті (мають однакову швидкість), то будь-яка область, для якої умова $\dot{\omega} = 0$ виконується (лінійна швидкість = const), трактується як регіон, що не деформується. Для Західної України ця умова не виконується $\dot{\omega} \neq 0$ і доходимо висновку, що зазначена територія інтерпретується як регіон, який деформується.

4. На основі обчислених із GPS-даних моделі компонент горизонтальних деформацій знайдено швидкості головних значень і швидкості головних осей деформацій земної кори. На перший погляд, зауважимо, що найбільші значення максимального зсуву у районах, розташованих навколо Українських Карпат. Швидкість дилатації має схожий розподіл.

5. Однак у цій роботі розглянуто лише проблему власних значень – власних векторів без оцінки точності, що може привести до сумнівних висновків щодо інтерпретації та вимагає додаткового розв'язання суто математичної задачі. Коваріаційна матриця тензора швидкості деформації повинна бути знайдена на основі коваріаційної матриці компонентів швидкості, отриманої програмним забезпеченням Bernese. Цю задачу опущено в статті через її можливий подальший розвиток. Фактично, область дослідження дуже складна і стосовно руху земної кори, і за її структурою, що потребує подальшого згущення мережі перманентних станцій GNSS.

Подяка. Вдячні двом анонімним рецензентам за їхні проникливі коментарі, які сприяли кращому поданню цих результатів та висловити щиру подяку Редактору за увагу до цього дослідження.

Література

Bird, P. (2003). An updated digital model of plate boundaries. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, *4* (3). art. no. 1027, doi:10.1029/2001GC000252, 1–52

Crespi, M., Pietrantonio, G., & Riguzzi, F. (2000) Strain tensor estimation by GPS observations: Software and applications. *Bollettino di geodesia e scienze affini*, *59*(3), 261–280.

DeMets, C., Gordon, R. G., Argus, D. F., & Stein, S. (1990). Current plate motions. *Geophysical journal international*, *101*(2), 425–478.

DeMets, C., Gordon, R. G., Argus, D. F., & Stein, S. (1994). Effect of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions. *Geophysical research letters*, *21*(20), 2191–2194

England, P., & Molnar, P. (1997). The field of crustal velocity in Asia calculated from Quaternary rates of slip on faults. *Geophysical Journal International*, *130*(3), 551–582.

Haines, A. J., & Holt, W. E. (1993). A procedure for obtaining the complete horizontal motions within zones of distributed deformation from the inversion of strain rate data. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *98*(B7), 12057–12082.

Julliette, L., Altamimi, Z., & Olivier, J. (2006). Interpolation of the European velocity field using least squeares collocation method. Paper presented at the *EUREF Symposium* 2006. Riga, Latvia, 14–17 June, 2006

Kreemer, C., Haines, J., Holt, W. E., Blewitt, G., & Lavallee, D. (2000). On the determination of a global strain rate model. *Earth, Planets and Space*, *52*(10), 765–770.

Marchenko, A. N. (2003). A note on the eigenvalue – eigenvector problem. In: Kühtreiber N. (Ed.), *Festschrift dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 70th birthday. Graz University of Technology*, pp. 143–152.

Marchenko, A. N., & Schwintzer, P. (2003). Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions. *Journal of geodesy*, *76*(9–10), 495–509.

Marchenko, A. N., Tretyak, K. R., & Serant, O. (2010). On the accuracy estimation of components of the strain tensor. In: *Modern Achievements of Geodetic Science and Industry*. *2*(20), 41–43 (in Ukrainian)

Marchenko, A. N., Marchenko, D.A. & Lopushansky, A.N. (2016). Gravity field models derived from the second degree radial derivatives of the GOCE mission: a case study. *Annals of Geophysics*, 59(6), 0649–0659.

Minster, J. B., & Jordan, T. H. (1978). Present-day plate motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *83*(B11), 5331–5354.

Moritz, H., & Mulle,r I. I. (1987). Earth's Rotation. Theory and estimations*, New York, Ungar*

Petit, G. & Luzum, B. (2010). *IERS Conventions (2010)*, IERS Technical Note, No.36, *Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie*, Frankfurt am Main.

Vaníček, P., Grafarend, E. W., & Berber, M. (2008). Short note: Strain invariants. *Journal of Geodesy*, *82*(4–5), 263–268.

Ward, S. N. (1998). On the consistency of earthquake moment rates, geological fault data, and space geodetic strain: the United States. *Geophysical Journal International*, *134*(1), 172–186.

A. N. MARCHENKO[1], S. S. PERII[1], O. V. LOMPAS[2], Yr. I. GOLUBINKA[2], D. A. MARCHENKO[2], S. KRAMARENKO[1], ABDULWASIU SALAWU[2]

[1] Lviv Polytechnic National University, Institute of Geodesy, Lviv, 79013, Ukraine, march@pancha.lviv.ua, periy_ss@ukr.net,
[2] General Commission for Survey, General Directorate of Geodesy, Olaya road, Riyadh, Saudi Arabia. lompasalex@gmail.com, iurii.golubinka@gmail.com, dmitriy.marchenko@gmail.com, a.salawu@gcs.gov.sa

DETERMINATION OF THE HORIZONTAL STRAIN RATES TENSOR IN WESTERN UKRAINE

Doppler Orbitography and Radio-positioning Integrated by Satellite (CORS) observations from 37 Global Navigation Satellite System (GNSS) stations located in the Western Ukraine area were processed using Bernese Processing Engine module (BPE) of Bernese GNSS Software version 5.2 for a time span of about 2.5 years. To get a better agreement for constrains, the IGS stations closest to the surrounding area of study were chosen with fixed coordinates of ITRF2008 at epoch 2005.0. Eastern and Northern components of velocities of GNSS observations from these 37 permanent stations, calculated from GNSS measurements, were used to construct a 2D model of horizontal strain rates field for the area. This study is presented in three parts. Firstly, two exact solutions for the components of the 2D strain rate tensor derived on the geosphere based on solving the eigenvalues – eigenvectors problem were analyzed, including skew symmetric rotational rate tensor. Secondly, based on the most simple and useful formulas from the first stage, a rigorous estimation of the accuracy of components of the 2D strain rate tensor were obtained based on the covariance propagation rule. Finally, the components of the 2D strain rate tensor, dilatation rate and components of the sheer rate tensor in the region were computed. A model of the rotation rate tensor was constructed for the described area, which led to the conclusion that the region of study should be interpreted as a deformed territory. Based on the computations from the GNSS-data model of components of horizontal deformations, the rates of principal values and rates of principal axes of the Earth's crust deformation were found. To be consistent, the main tectonic formations are shown as the background intensity of different components of velocities, the rotation rate and strain rate tensors. Topographic features of the region were based on the SRTM-3 model (Shuttle Radar Topography Mission) with resolution 3″×3″. At the first sight, the maximum sheer rates have greatest values in the areas located around the Ukrainian Carpathians. The dilatation rate has also a similar distribution. Nevertheless, because in the paper only eigenvalue – eigenvector problem without accuracy estimation has been considered, which possibly leads to doubtful conclusions regarding interpretation and requires an additional solution of a purely mathematical problem. The full covariance matrix of the strain rate tensor should be found based on given full covariance matrix of the velocity components obtained by Bernese software. As a matter of fact, the study region is very complex in terms of crustal movements, which, according to the results obtained, require further densification of permanent GNSS stations.

Key words: horizontal velocity; strain rate tensor; dilatation rate; maximum sheer rate tensor; accuracy estimation; skew symmetric rotational rate tensor.

Надійшла 18.07.2019 р.