

UDC 550.831:528.11:519.281

П. Д. ДВУЛІТ¹, Й. В. ДЖУНЬ²

¹ Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: dvupet@ukr.net.

² Кафедра математичного моделювання, Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем'янчука, вул. С. Дем'янчука, 4, Рівне, 33027, Україна, ел. пошта: iosif-june@rambler.ru.

ДІАГНОСТИКА ВИСОКОТОЧНИХ БАЛІСТИЧНИХ ВИМІРІВ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПРИСКОРЕННЯ МЕТОДАМИ НЕКЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

<https://doi.org/10.23939/jgd2019.01.005>

Мета дослідження: показати необхідність використання сучасних уявлень про закон розподілу похибок спостережень, задіяних в категоріях “Некласичної теорії вимірів” (НТПВ) при проведенні високоточних балістичних визначень гравітаційного прискорення. Ці визначення характеризуються великими обсягами, що, у відповідності з теорією професора Кембріджського університету Г. Джеффріса, автоматично виводить їх за границі дії класичних уявлень про закон похибок вимірів. Ці застарілі уявлення про закон розподілу похибок вимірів великого обсягу є головною перешкодою на шляху вдосконалення методики цих дуже важливих визначень. **Методика дослідження** забезпечується процедурами НТПВ, які розроблені з метою контролю ймовірнісної форми статистичних розподілів високоточних абсолютних балістичних вимірів з великими обсягами вибірок на основі рекомендацій Г. Джеффріса і на принципах теорії перевірки гіпотез. **Основним результатом** дослідження є проведення НТПВ-діагностики метрологічної ситуації високоточних вимірів балістичним гравіметром FG-5, виконаних після деяких вдосконалень програми спостережень. Цей метод діагностики ґрунтується на використанні довірчих інтервалів для оцінок асиметрії і експесу отриманої вибірки вимірів g з наступним застосуванням χ^2 -тесту Пірсона для визначення значимості відхилень їх розподілів від встановлених норм. У відповідності з категоріями НТПВ такими нормами є закони Гауса і Пірсона-Джеффріса, оскільки саме вони забезпечують несингулярність вагової функції вибірки і можливість отримання невироджених оцінок g при математичній обробці вимірів. **Наукова новизна:** задіяні можливості нового інструмента в області “Data Analysis” – НТПВ з метою вдосконалення методики високоточних вимірів g , які виконуються в складній метрологічній ситуації і необхідністю врахування ряду нестационарних джерел систематичних похибок. **Практична значущість** дослідження полягає в застосуванні НТПВ – діагностики ймовірнісної форми розподілу вимірів g з метою вдосконалення методики цих високоточних визначень. Дослідження причин відхилень розподілів похибок від встановлених норм забезпечує метрологічну грамотність проведення високоточних вимірів великого обсягу.

Ключові слова: закони похибок: Гауса, Пірсона-Джеффріса; абсолютні виміри гравітаційного прискорення; некласична теорія похибок вимірів.

Вступ

Абсолютні, високоточні балістичні виміри g виконуються в складній метрологічній ситуації, яка постійно змінюється під впливом різних факторів. За таких умов вимірів дуже важливо здійснювати статистичний контроль метрологічної ситуації після закінчення спостережень. Методом такого контролю, який рекомендував ще К. Пірсон [Pearson, 1902], є аналіз генеральної форми отриманого розподілу похибок вимірів. Якщо форма розподілу цих похибок неістотно відрізняється від закону Гауса, то, у відповідності з класичними уявленнями, це є доказом некорельованості результатів вимірів, тобто, похибки є цілком випадковими і не мають якоїсь інформації. Якщо ж форма розподілу вимірів істотно відрізняється від закону Гауса, то це свідчить про розладку інструмента або про вплив невиключених систематичних похибок. Розробка таких підходів, розпочатих академіком А. М. Колмогоровим вперше була реалізована Н. О. Бородачовим [Borodachew, 1950]. З плином часу класичні уявлення про закон похибок зазнали еволюції, основні етапи якої ми розглянемо далі при обґрунтуванні процедур НТПВ. Основним стимулом цієї еволюції є дія парадоксу Хампеля [Hampel et al., 1986], або, що те ж саме – парадоксу Ельясберга – Хампеля [Dzhun, 2012], у відповідності з яким, будь-яка гіпотеза про вид розподілу ймовірностей буде відхилена при достатньо великому числі членів статистичного ряду.

Оскільки розглянуті нами виміри g вимагають генерації великих вибірок, як правило, з обсягами $n > 500$, то, у відповідності з висновками Г. Джеффріса, в цьому разі гіпотеза нормальності є неспроможною

[Jeffreys, 1937, 1939, 1998]. По Джеффрісу цілком випадкові, за відсутності систематичних впливів похибки підкоряються розподілу Пірсона VII типу із діагональною інформаційною матрицею і показником степені m в границях: $3 \leq m \leq 5$. Далі ми детально розглянемо, яким чином були отримані вказані границі. А зараз, закінчуючи вступ, сформуємо основну концепцію, що випливає з принципів НТПВ і на якій зацентруємо увагу: Гаусів характер похибок багатократних високоточних вимірювань g з $n > 500$, свідчить про недостатньо виключені систематичні похибки.

Мета дослідження

Наша головна мета – полягає в тому, щоб обґрунтувати доцільність використання сучасних уявлень про розподіл похибок багатократних спостережень великого обсягу, викладених у НТПВ, у процесі проведення високоточних вимірів g . У відповідності з теорією Джеффріса [Jeffreys, 1998 § 5.7], вибірки обсягом $n > 500$ не є гауссовими, навіть коли виміри виконуються в однорідних умовах вимірювання. Припущення про те, що такі вимірювання повинні слідувати нормальному закону, є головною перешкодою на шляху вдосконалення нинішніх методик високоточних вимірів g . Той факт, що ці виміри виконуються в складній метрологічній ситуації, яка є нестационарною і переважно порушується, на думку Джеффріса, повинна викликати істотні додатні ексцеси похибок, але ні в якому випадку не їх нормальність, якщо, звичайно, правильно усунені систематичні впливи. На гравіметр з такою високою точністю вимірювання діють зовсім не відчутні для спостерігача ефекти: мікросейсми, припливи, гравітаційний вплив атмосфери та інші фактори. Тому основним завданням нашого дослідження є розробка такого методу діагностування ймовірнісної форми похибок вимірювання g на основі концепцій НТПВ, який вказує на те, що ці помилки є абсолютно випадковими без будь-яких систематичних впливів.

Методика дослідження розподілів

В цілому, ця методологія забезпечується процедурами НТПВ, які розроблені з метою контролю ймовірнісної форми розподілу високоточних вимірів g з великими обсягами даних на основі принципів теорії перевірки гіпотез Неймана-Пірсона.

Проблема вдосконалення методів спостереження є однією з найважливіших і включає два аспекти:

- достатньо повне усунення систематичних похибок з результатів вимірів;
- зведення розподілів похибок вимірювань до таких норм, які висуваються неklasичною теорією похибок вимірів.

Успіх у вирішенні проблеми усунення систематичних похибок за результатами спостережень залежить від ступеня розвитку теорії вимірюваного явища та повноти дослідження гравіметра.

Торкаючись основної вимоги теорії похибок, то її класична версія вперше була сформульована К. Ф. Гаусом у його відомих трактатах [Gauss, 1809, 1823]. В першому з них ця вимога була дещо завуальована і зведена до виконання такої умови для вагової функції:

$$-\frac{f'(x)}{x \cdot f(x)} = \text{const}, \quad (1)$$

де $f(x)$ - щільність ймовірності похибок вимірювання x . Легко довести, що вимога (1) означає, нормальність вункції $f(x)$ [Dvulit & Dzhun, 2017].

Тільки за нормальності похибок всі виміри мають однакові ваги σ^{-2} і можна обчислювати середнє арифметичне за результатами вимірів. Знайдемо нижню межу дисперсій σ_a^2 та σ_σ^2 ефективних оцінок параметрів a та σ функції $f(x)$, використовуючи нерівність Рао-Крамера (інакше нерівність інформації Г. Дармуа та М. Фреше):

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \sigma_\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2n}. \quad (2)$$

Зауважимо, що вирази (2) можна використовувати лише за нормального закону похибок.

Фундаментальний вираз для вагової функції похибок вимірів

Підставляючи у формулу (1), вираз диференціальної форми сімейства кривих Пірсона [Bolshev & Smirnov, 1983]:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x + c_1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}, \quad (3)$$

ми отримуємо основне співвідношення теорії вагових функцій результатів вимірів:

$$P(x) = \frac{f'(x)}{x * f(x)} = \frac{x+c_1}{x(c_0+c_1x+c_2x^2)} = \frac{1}{c_0+c_1x+c_2x^2} + \frac{c_1}{x(c_0+c_1x+c_2x^2)}, \quad (4)$$

де точкою відліку для x є середнє, а константи:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= [\sigma^2(4\beta_2 - 3\beta_1)]/b; \\ c_1 &= [\sigma\sqrt{\beta_1(\beta_2 + 3)}]/b; \\ c_2 &= (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)/b; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} b &= 2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9); \quad \sigma^2 = \mu_2; \\ \beta_1 &= \mu_3^2 / \mu_2^3; \quad \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_r &= \int_{l_1}^{l_2} x^r f(x) dx; \quad r = 2, 3, 4, \dots; \\ \mu_0 &= 1; \quad \mu_1 = a = 0; \quad x = g; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

l_1, l_2 – границі області зміни щільності $f(x)$.

Відмітимо, класична теорія похибок ґрунтується на ваговій функції (1) з додатковим припущенням про відсутність систематичних похибок в результатах вимірів [Gauss, 1823].

Еволюція уявлень про розподіл похибок

Методи класичної теорії помилок вимірювань (КТПВ) масово і успішно застосовувалися вже понад двісті років і до теперішнього часу. Багато з дослідників вважали: якщо ці методи так добре себе зарекомендували на протязі такого довгого часу, то це є безсумнівним доказом правильності та непорушності тих законів (аксіом), які покладені в їх основу. Виникла ілюзія того, що не потрібно перевіряти адекватність цих методів, якщо вони підтверджені такою багаторічною практикою. Погляд на універсальність закону Гауса, як "закон похибок" почав змінюватися тільки в 1886 році, коли відомий математик і астроном С. Ньюкомб [Newcomb, 1886], на основі аналізу похибок астрономічних спостережень, вперше зазіхнув на монополію нормального розподілу. [Ogorodnikov, 1928]. Він запропонував реальні негаусові похибки представляти як "суміш" декількох нормальних розподілів з загальним центром, але з різними дисперсіями. Проте, лише після публікації роботи [Hulme & Syms, 1939], виконаній астрономами в Грінвічі, стало очевидно, що необхідно змінювати фундаментальну концепцію розподілу похибок. Г. Р. Хюльме і Л. С. Т. Сімс проаналізували дві серії спостережень широти в Грінвічі в період 1927-1931 і 1932-1936 рр., які мають обсяги 4540 і 4982. Число похибок $g > 3\sigma$ в першій серії становила 357 (7,86%), що в 30 разів більше, ніж повинно бути за Гауса, а в другій їх було вже 453 (9,09%), тобто в 35 разів більше, ніж очікувалося за Гаусом. Негавсовий характер похибок було також продемонстровано в роботах інших відомих дослідників [Eddington, 1933; Doolittle, 1910, 1912; Student, 1927; Tukey, 1960, 1967]. Однак автором нової фундаментальної концепції закону розподілу випадкових похибок спостережень став Г. Джеффріс [Jeffreys, 1937]. Він не залишає назавжди концепцією Гауса. У §. 5.7 роботи [Jeffreys, 1998], він стверджує: "... зазвичай, розподіли похибок спостережень слідує нормальному закону досить тісно". Але заслуга Джеффріса саме в тому, що він вперше відповів на питання: коли "зазвичай" і "тісно". "Заазвичай" і "тісно", тоді коли є не більше 500 спостережень. Проаналізувавши дані Пірсона [Pearson's, 1902], він показав у роботі [Jeffreys, 1939], що нормальний закон стає практично і теоретично неспроможним при обсягах вибірок $n > 500$. У цьому випадку він пропонує використовувати розподіл Пірсона VII типу, але не його класичну форму, а форму, перетворену ним і яка має діагональну інформаційну матрицю, оскільки відомо, що незалежність оцінок математичного сподівання і дисперсії відбувається тільки для нормальної генеральної сукупності [Geary, 1947; Lucacs, 1942]. Такої властивості класична крива Пірсона VII типу не мала. Щоб уникнути плутанини, будемо отриману Джеффрісом форму кривої Пірсона з діагональною інформаційною матрицею називати як розподіл Пірсона-Джеффріса (закон), скорочено PJVII-розподіл. Він має вигляд [Jeffreys, 1937]:

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{2\pi(m-0,5)} \cdot \Gamma(m+0,5)} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{0,5}{M} \left(\frac{x-\lambda}{\sigma} \right)^2 \right]^{-m}, \quad (8)$$

де $\Gamma(m)$ – гама - функція; $M = (m-0,5)^3 m^{-2}$; λ , σ – відповідно параметри положення і розсіювання; m – ключовий параметр розподілу (8), що залежить від ексцесу і, таким чином, показує ступінь відхилення RJVII-розподілу від закону Гауса.

Фактично форма (8) є узагальненням розподілів Гауса і Стюдента [Dzhun, 2015]: при $m = \infty$ (8) є нормальним законом, а при $m < \infty$ (8) – розподілом для дискретних значень ступенів свободи $\nu = 2m - 1$. Джеффріс, що пропонує використовувати форму (8) для $n > 500$ у роботі [Jeffreys, 1937], піддав цю пропозицію такому глибокому математичному аналізу, що власне і дозволило поставити її в основу НТПВ. Концепція похибок Джеффріса (8) виявилася настільки ж досконалою математично, як і концепція нормальності Гауса, але на відміну від останньої, вона є істотно більш адекватною реальній формі розподілів похибок у великих вибірках з $n > 500$. У роботі [Jeffreys, 1939] проілюстровано метод побудови ефективних оцінок параметрів RJVII-розподілу і вперше застосовано його на прикладі аналізу спостережень широти в Грінвічі. У цій же статті Джеффріс аналізує шість рядів приблизно, по 500 спостережень, отриманих Пірсоном [Pearson, 1902], які були зроблені в контрольованих однорідних умовах спостережень. Джеффріс, підганяючи розподіл RJVII до цих даних, виявив, що чотири їх серії мають більш довгі "хвости", а дві серії – більш короткі, ніж нормальний розподіл. Джеффріс також як Пірсон виявив значні кореляції даних для серій з короткими "хвостами". Він виявив для цих шести рядів Пірсона такі співвідношення між показником $\mu = m^{-1}$ VII і II типів симетричних кривих Пірсона і коефіцієнтом r серіальної кореляції цих спостережень (табл. 1):

Таблиця 1

Джеффрісів аналіз шести серій Пірсона приблизно в 500 спостережень

$\mu = m^{-1}$	r	$M_{calculated}$	$O-C$
+0,230	+0,16	+0,173	+0,057
+0,163	+0,24	+0,123	+0,040
+0,111	+0,23	+0,129	-0,018
+0,040	+0,57	-0,083	-0,063
-0,080	+0,32	-0,073	-0,053
-0,225	+0,72	-0,018	-0,049

В цих даних значення $\mu < 0$ відповідає показнику кривої Пірсона II типу. Припускаючи залежність μ від r у вигляді: $\mu = a + br$, Jeffreys знаходить рішення: $a = 0.273 \pm 0.093$; $b = 0,62 \pm 0,22$. За відсутності серіальної кореляції похибок ($r = 0$), маємо $m = 3,66$ з такими межами згідно стандарту 2,73 - 5,56. Джеффріс, згідно з цими даними, робить висновок, що дійсно незалежні похибки при однорідних умовах спостережень повинні слідувати RJVII – розподілу з $3 \leq m \leq 5$.

Висновки Джеффріса суперечили існуючим уявленням про закон розподілу похибок спостережень. Необхідна було їх фундаментальна перевірка. Вона здійснена в Головній Астрономічній обсерваторії Академії наук України за ініціативою академіка Е. П. Федорова, всесвітньо відомого фахівця з небесної механіки та руху полюсів Землі [Fedorov, 1963]. Для перевірки були використані ряди високоточних спостережень найвищої якості, починаючи з історичних рядів Ф. В. Бесселя і закінчуючи сучасними астрономічними, космічними, гравіметричними та іншими спостереженнями в різних галузях науки. Всього було розглянуто 69 рядів із загальним числом спостережень 190178. Результати цієї перевірки показані на рис., який використовується з метою ідентифікації типів розподілів Пірсона [Bolshev & Smirnov, 1983]. З малюнка видно, що кожен емпіричний розподіл характеризується трьома координатами: ексцесом $\mathcal{E}$, квадратом асиметрії β_1 та об'ємом вибірки n у тисячах по вертикалі. 0 - початок координат відповідає нормальному розподілу на цьому полі. З рис. видно, що лише мала частина серій похибок, переважно малого об'єму, групується навколо нуля. Основна маса серій зсунена праворуч нуля і має значимі ексцеси $\mathcal{E} > 0$. Їх розмах від - 0,20 до + 6,0; ексцеси з $\mathcal{E} < 0$ виявилися незначимими. У результаті можна зробити такий важливий висновок: найхарактернішою ознакою похибок спостережень великого обсягу є їх нульова асиметрія і додатний високозначимий ексцес. Такий висновок не є новим. Російський вчений Н. І. Ідельсон ще в 1947 році писав: «Ніколи, наскільки нам відомо, не було рядів похибок з від'ємним ексцесом» [Idelson, 1947]. Проте ні фахівці в галузі теорії похибок, ні математики не надали особливого значення цьому висновку.

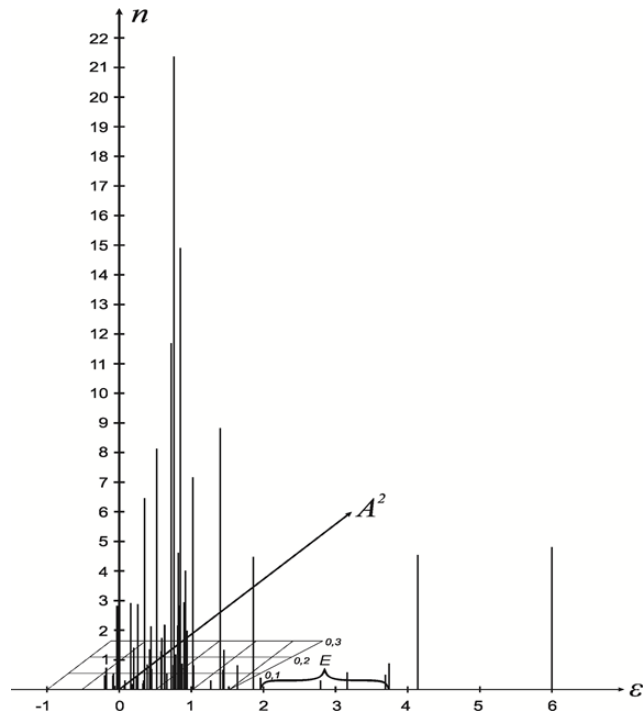


Рис. 1. Розміщення розподілів емпіричних похибок астрономічних, космічних, гравіметричних, геодезичних, економічних рядів (область E) на полі для ідентифікації типів кривих Пірсона як функції від A^2 і $\mathcal{E}$. Вісь n вказує обсяг вибірки в тисячах. Кривій Пірсона VII типу відповідає пряма з ексцесами: $0 < \mathcal{E} < 1.5$.

Базові принципи НТПВ та їх значення для вдосконалення методики високоточних вимірювань g

Результати, отримані в роботі [Dzhun, 1992], дозволили розпочати розробку НТПВ, яка була завершена у 2015 році [Dzhun, 2015]. Наведемо основні категорії цієї теорії, оскільки наші подальші висновки ґрунтуються на них. Сформулюємо перший фундаментальний принцип НТПВ, який по суті є пропозицією Г. Джеффріса, сформульованого в [Jeffreys, 1939]: **при значному числі многократних спостережень ($n > 500$), їх випадкові незалежні помилки слідуєть закону Пірсона-Джеффріса типу VII з показником m в межах:**

$$3 \leq m \leq 5, \quad (9)$$

що відповідає ексцесам:

$$6 \geq \mathcal{E} \geq 1,2 \quad (10)$$

або таким ступеням свободи ν для t – розподілу:

$$5 \leq \nu \leq 9 \quad (11)$$

Ніхто з дослідників, які використовували негаусові розподіли, за виключенням Джеффріса, не вважав, за потрібне перевіряти їх інформаційні матриці на діагональність. В той же час, саме незалежність параметрів розподілу забезпечує найбільшу простоту отримання їх оцінок. Тому використанню закону (8) в теорії помилок нема альтернативи.

Прийнявши в якості неklasичного закону похибок розподіл (8), ми тим самим порушуємо умову (1), що має місце тільки для закону Гауса. Виникає необхідність в узагальненні умови (1), що призводить до визначення другого фундаментального принципу НТПВ: **індивідуальні ваги спостережень, які підкоряються закону похибок Пірсона-Джеффріса VII типу, характеризуються своєю ваговою функцією, адаптованою до цього розподілу.**

Диференціюючи формулу (8) і використовуючи вираз (1), отримаємо вагову функцію закону похибок Пірсона-Джеффріса:

$$P(x) = \left[\left(\frac{m-0.5}{m} \right)^3 \sigma^2 + \frac{\vartheta^2}{2m} \right]^{-1}, \quad (12)$$

де помилка спостереження $\vartheta = x - \lambda$, λ , σ , m – оцінки параметрів закону щільності ймовірності (8), які визначаються методом максимальної правдоподібності (ММП) по результатам вимірювань.

Фізичний зміст $P(x)$ є наступним: вага $P(x)$ – це обернена дисперсія спостереження x , яке має похибку $\vartheta = x - \lambda$. Таким чином, формула (12) дозволяє визначити вагу кожного окремого гравіметричного спостереження, навіть аномального. Зрозуміло, що вага останнього буде дуже малою, оскільки вона

обернено пропорціонально квадрату похибки ϑ . Легко також бачити, що для $m = \infty$ (закон Гауса) $P(x) = \sigma^{-2} = \text{const}$.

Так як RJVII – розподіл задовольняє всім умовам існування границь нерівності Рао-Крамера, то нижні границі для дисперсій σ_λ^2 , σ_σ^2 , σ_m^2 ефективних оцінок його параметрів λ , σ , m будуть наступними [Dzhun, 1992]:

$$\sigma_\lambda^2 \geq \frac{\sigma^2}{n} \frac{(m-0.5)^2 (m+1)}{m^3}; \quad \sigma_\sigma^2 \geq \frac{\sigma^2}{2n} \frac{(m+1)}{(m-0.5)}; \quad (13)$$

$$\sigma_m^2 \geq \left\{ n \left[\psi'(m-0.5) - \psi'(m) - \frac{m+1}{2m^2(m-0.5)} \right] \right\}^{-1}, \quad (14)$$

де $\psi'(m-0.5)$, $\psi'(m)$ – тригама – функції від m .

Для закону Гауса ($m = \infty$), границі нерівності Рао-Крамера (13) ідентичні відношенням (2).

Аналізуючи вагову функцію (4), ми бачимо, що при значимій асиметрії розподілу похибок ($c_1 \neq 0$) і з $x = 0$, а також при $\mathcal{E} < 0$, вона набуває виродженого (сингулярного) характеру. Отже, єдина область оцінювання, в якій (4) є несингулярною, відповідає джеффісовим похибкам (8) з ексцесами $0 \leq \mathcal{E} < \infty$. Оскільки джеффісові похибки є абсолютно випадковими, без будь-якого систематичного впливу, і слідує закону (8) зі значенням m в межах (9), то можна сформулювати третій фундаментальний принцип НТПВ, який також є критерієм на відсутність значної дії систематичних помилок: **впливом слабких, невиключених, корельованих помилок у результатах спостережень можна знехтувати тільки тоді, коли вагова функція розподілу похибок вимірювань є несингулярною, а параметр закону (8) m знаходиться в межах $3 \leq m \leq 5$.**

Критерії несингулярності вагової функції

В якості критеріїв несингулярності вагової функції доцільно використовувати оцінки асиметрії A і ексцесу $\mathcal{E}$, оскільки саме вони визначають її характер. Вони можуть бути отримані на основі незміщених оцінок моментів [Cramer, 1946]:

$$A = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} \frac{m_3}{m_2^{1.5}}; \quad (15)$$

$$\mathcal{E} = \frac{(n-1)(n^2-2n+3)}{n(n-2)(n-3)} \frac{m_4}{m_2^2} - \frac{3(n-1)(2n-3)}{n(n-2)(n-3)} - 3, \quad (16)$$

де m_r – вибіркові центральні моменти порядку r , обчислені за результатами вимірів x_i :

$$m_r = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r; \quad \bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{x} = g. \quad (17)$$

Стандартні похибки для A і $\mathcal{E}$ отримують із формул [Cramer, 1946]:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{4\mu_2^2\mu_6 - 12\mu_2\mu_3\mu_5 - 24\mu_2^3\mu_4 + 9\mu_3^2\mu_4 + 35\mu_2^2\mu_3^2 + 36\mu_2^5}{4\mu_2^5n}}; \quad (18)$$

$$\sigma_{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\mu_2^2\mu_8 - 4\mu_2\mu_4\mu_6 - 8\mu_2^2\mu_3\mu_5 + 4\mu_4^3 - \mu_2^2\mu_4^2 + 16\mu_2\mu_3^2\mu_4 + 16\mu_2^3\mu_3^2}{\mu_2^6n}}, \quad (19)$$

де μ_r – центральні моменти порядку r .

При значеннях $n > 500$ моменти μ_r в (18-19) можуть бути замінені на вибіркові m_r , які обчислюють за формулою (17), оскільки за таких обсягів вибірок зміщення моментів m_r на оцінки σ_A , $\sigma_{\mathcal{E}}$ особливо не впливає.

Отримавши значення A , $\mathcal{E}$, σ_A , $\sigma_{\mathcal{E}}$ за формулами (15 – 19), визначаємо довірчі інтервали для A і $\mathcal{E}$:

$$A \pm t_{\alpha} \cdot \sigma_A; \quad \varepsilon \pm t_{\alpha} \cdot \sigma_{\varepsilon} \quad (20)$$

де t_{α} - квантиль, який визначається за допомогою функції Лапласа для рівня ризику α ; σ_A і σ_{ε} отримують із формул (18-19).

У відповідності із теорією перевірки гіпотез Неймана-Пірсона, якщо довірчі інтервали (20) охоплюють нуль, то це є необхідна і, як правило, достатня ознака нормальності похибок вимірювань. Якщо ж, хоча б один довірчий інтервал нуль не покриває, то для вирішення питання про несингулярність чи сингулярність вагової функції потрібно скористатися табл. 2, пам'ятаючи про те, що тільки закони Гауса і Пірсона-Джеффріса забезпечують можливість отримання невироджених оцінок при математичній обробці даних. Табл. 2 – є по суті програмою для метрологічної діагностики високоточних вимірювань g .

Отримані результати

Для реалізації розглянутого у табл. 2 алгоритму метрологічної діагностики високоточних вимірів g , ми скористалися результатами абсолютних гравіметричних вимірів в точках: Борова Гора, Юзефослав, Ксянж, представлених нам Марцином Барліком із Варшавської політехніки. Чисельні характеристики цих вимірів та їх гистограми наведені в табл. 3 та 4.

Таблиця 2

Діагностика результатів гравіметричних вимірів на основі побудови довірчих зон для асиметрії та ексцесу при $n > 500$.

Результати	Діагностика по результату
Довірчі інтервали для асиметрії A і ексцесу ε накривають нуль, що означає підтвердження гіпотези: $A = 0; \quad \varepsilon = 0.$	Вагова функція знаходиться в несингулярній області класичної оцінки. Отримані результати слід розглядати як остаточні. Хоча розподіл похибок не є ідеальним, проте нема необхідності застосовувати НТПВ.
Довірчий інтервал для A накриває нуль, а для ε - накриває найбільш сприятливу зону (10) чи принаймі торкається її, що означає підтвердження гіпотез: $A = 0; \quad 1.2 \leq \varepsilon \leq 6.$	Кожен експериментатор повинен мріяти про такий випадок: вагова функція є не лише несингулярною, але також забезпечує ефективне оцінювання в наступному необхідному наближенні, яке реалізується методами НТПВ.
Конфіденційний інтервал для A накриває нуль, для ε - знаходиться в зоні $0 - 1.2$, не торкаючись його країв, що означає підтвердження гіпотези: $A = 0; \quad 0 < \varepsilon < 1.2.$	Вагова функція не є сингулярною, тобто оцінка допустима, але розподіл похибок не є ідеальним, оскільки підтверджується дія слабких, не виключених систематичних помилок. Для поліпшення якості оцінок необхідно наступне наближення для оцінки параметрів математичної моделі з використанням методів НТПВ.
Довірчий інтервал для A накриває нуль, а весь довірчий інтервал для ε знаходиться у від'ємній області, що означає підтвердження гіпотез: $A = 0; \quad \varepsilon < 0.$	В цьому випадку вагова функція розподілу похибок є несингулярною, але оцінка можлива, якщо жодна з похибок не дорівнює і не перевищує величини $[2\mu_2\beta_2/ \varepsilon]^{0.5}$. Якщо ця умова виконана, то з метою більш об'єктивної оцінки, яка не перебільшує достовірності, необхідне наступне наближення, після застосування класичних методів, з метою оцінки параметрів математичної моделі НТПВ з використанням вагової функції розподілу Пірсона- Джеффріса II типу [Dzhun, 2015].
Підтвердження гіпотези: 1) $A < 0; \varepsilon = 0.$ 2) $A > 0; \varepsilon = 0.$ 3) $A < 0; \varepsilon < 0.$ 4) $A > 0; \varepsilon > 0.$ 5) $A > 0; \varepsilon < 0.$ 6) $A < 0; \varepsilon > 0.$	Це патологічні випадки оцінки. У всіх цих випадках вагова функція є сингулярною, потрапляючи в неприпустимі області оцінки, що неможливо внаслідок нерегулярності вагової функції.

Таблиця 3

Характеристики вибірок III серії абсолютних балістичних вимірів галілеєвого прискорення в точках: Борова Гора, Юзефослав, Ксянж

№	Характеристика вибірок	Пункти спостережень		
		Борова Гора	Юзефослав	Ксянж
1	Результати вимірів, їх стандарт: $g \pm \sigma_g$ дата	981250155,20±0,17 15.08.2016, 21:57:24	981213788,32±0,47 01.11.2011, 14:05:02	981056794,22±0,17 17.04.2008, 17:51:15
2	Обсяги спостережень n	1083	516	822
3	Середня квадратична похибка вимірів і їх стандарт: $\sigma \pm \sigma_\sigma$	5,68±0,12	10,79±0,34	4,86±0,12
4	Асиметрія і їх стандарт: $A \pm \sigma_A$	0,016±0,076	-0,018±0,118	-0,039±0,097
5	Довірчі інтервали для A , $\alpha = 10\%$	-0,109±0,141	-0,112±0,176	-0,199±0,121
6	$\alpha = 5\%$	-0,133±0,165	-0,249±0,213	-0,223±0,145
7	Експес і його стандарт: $\mathcal{E} \pm \sigma_{\mathcal{E}}$	-0,002±0,151	+0,020±0,241	+0,240±0,167
8	Довірчі інтервали для $\mathcal{E}$, $\alpha = 10\%$	-0,250±0,246	-0,376±0,411	-0,035±0,515
9	$\alpha = 5\%$	-0,298±0,294	-0,452±0,492	-0,087±0,567
10	Вибіркові моменти: m_2			
11	m_3	32,222	116,383	23,60
12	m_4	2,853	-22,232	-4,42
13	m_5	3112,982	41 147,381	1811,30
14	m_6	603,675	-128 8514,322	-1667,56
15	m_8	509 897,214	26 008 872,567	240 843,45
		117 241 423,602	23 426 330 151,996	43 989 697,36

Розглянемо тепер ці виміри з двох точок зору, одна з яких буде базуватися на принципах КТПВ, друга - на положеннях НТПВ.

З точки зору КТПВ, виміри на всіх пунктах виконані добре: асиметрія у всіх випадках незначна, оскільки довірчі інтервали для A впевнено накривають нуль при $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ (рядки 5 і 6 таблиці 3). По експесу, найбільш сприятлива ситуація спостерігається в пунктах Борова-Гора і Юзефослав, і найгірша, але допустима при $\alpha = 10\%$ і $\alpha = 5\%$ властива пункту Ксянж, (рядки 8 і 9 таблиці 3). Перевірка нормальності

цих вимірів також показала хороші результати: ймовірності P_{χ^2} того, що виміри на пунктах Борова-Гора і Юзефослав, Ксянж є вибірками із нормальної генеральної сукупності, відповідно, дорівнює 15,22%; 49,17%; 20,00%, тобто, вони далекі від своїх критичних меж (верхній ряд табл. 4, у якій, окрім ймовірностей P_{χ^2} вказано число ступенів свободи r критерію χ^2). Це означає, що вимірювальна система на цьому гравіметрі була розроблена творцями цього інструменту добросовісно, але в рамках застарілих класичних уявлень про закон розподілу похибок вимірів великого обсягу.

Таблиця 4

Гістограми III серії похибок абсолютних балістичних вимірів галілеєвого прискорення на пунктах: Борова Гора, Юзефослав і Ксянж.

№	Борова Гора, $P_{\chi^2} = 15.22\%$ $r=12$				Юзефослав, $P_{\chi^2} = 49.17\%$ $r = 8$				Ксянж, $P_{\chi^2} = 20.00\%$ $r = 11$			
	Інтервали	Частоти n_i	Гаусові частоти n'_i	$n_i - n'_i$	Інтервали	Частоти n_i	Гаусові частоти $S n'_i$	$n_i - n'_i$	Інтервали	Частоти n_i	Гаусові частоти n'_i	$n_i - n'_i$
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

1	37,1-39,4	5	2,16	+2,84	49,300-55,305	2	}	3,08	+1,92	776,80-779,04	2	}	3,00	0,00
2	39,4-41,7	5	6,51	-1,51	55,305-61,293	3				779,04-781,26	1			
3	41,7-44,0	14	16,83	-2,83	61,293-67,280	5				781,26-783,48	10			
4	44,0-46,3	38	37,03	+0,97	67,280-73,268	28		28,85	-0,85	783,48-785,69	22		21,39	+0,61
5	46,3-48,6	68	69,28	-1,28	73,268-79,255	64		61,34	+2,66	785,69-787,91	38		47,21	-9,21
6	48,6-50,9	99	110,59	-11,59	79,255-85,242	107		96,68	+10,32	787,91-790,13	80		84,60	-4,60
7	50,9-53,2	169	149,34	+19,66	85,242-91,230	100		112,80	-12,8	790,13-792,35	141		123,48	+17,52
8	53,2-55,5	179	171,89	+7,11	91,230-97,217	96		97,47	-1,47	792,35-794,56	133		146,14	-13,14
9	55,5-57,8	151	168,29	-17,29	797,217-	67		62,38	+4,62	794,56-796,78	148		142,21	+5,79
10	57,8-60,1	136	140,15	-4,15	803,205	30		29,59	+0,41	796,78-799,00	122		112,24	+9,76
11	60,1-62,4	102	99,28	+2,72	03,205-09,192	10		10,38	-0,38	799,00-801,21	66		71,91	-5,91
12	62,4-64,7	64	59,93	+4,07	09,192-15,180	4		2,70	+1,30	801,21-803,43	39		37,89	+1,11
13	64,7-67,0	40	30,50	+9,50	15,180-21,167					803,43-805,65	9		16,17	-7,17
14	67,0-69,3	7	13,43	-6,43						805,65-807,86	7		6,81	+0,19
15	69,3-71,6	2	6.92	-0.92						807,86-810,08	4		1,60	+2,4
16	71,6-73,9	3												
17	73,9-76,2	1												

Розглянемо результати спостережень на цих же пунктах з точки зору вимог НТПВ.

Порівнюючи стандарти одного виміру (рядок 3, табл. 3) ми бачимо, що пункт Ксянж має найкращу метрологічну ситуацію: точність вимірів на цьому пункті значно вище, ніж в інших пунктах. Крім того, при рівні ризику $\alpha = 10\%$ ліва межа довірчого інтервалу для $\mathcal{E}$ на пункті Ксянж, хоч і покриває нуль, але настільки близька до нього, що практично підтверджує його додатне значення. Розподіл похибок на цьому пункті відхиляється від нормальності у хорошому напрямку, а саме, воно є найближчим до досконалої форми джеффісових помилок (8).

Довірчий інтервал для $\mathcal{E}$ на пунктах Борова Гора, Юзефослав (табл. 3, рядки 8, 9) надійно накриває нуль. Оскільки і асиметрія для цих пунктів є незначною, то у відповідності з концепціями НТПВ, можна зробити висновок, враховуючи дані табл. 3, про можливість, застосування на цих пунктах класичного методу обробки даних.

Найгірша метрологічна ситуація властива пункту Юзефослав, оскільки тут отримана найбільша стандартна похибка одного виміру $\sigma = 10,79 \mu$ Гал (табл. 3, рядок 3).

Відмітимо, що в табл. 3 наведено результати НТПВ діагностики III серії спостережень на пунктах Борова-Гора, Юзефослав та Ксянж.

НТПВ – діагностика I серії із наданих нам спостережень показала, при ризику $\alpha = 10\%$, значимий від'ємний експес в Борова Гора і практично значиму асиметрією в Ксянж. Тому результати цієї діагностики не були опубліковані із-за сингулярності вагової функції для цих двох розподілів.

НТПВ – діагностика II серії вимірів g на тих же трьох пунктах була опублікована в роботі [Dvulit & Dzhun, 2017]. Вона показала поліпшення форми розподілів і те, що їх обробку можна вести за допомогою методів КТПВ. Цікаво порівняти результати P_{χ^2} -тесту гіпотези нормальності для II серії спостережень, представлені в роботі [Dvulit & Dzhun; 2017] і результати III серії спостережень в таблиці 5 даної статті (табл. 5):

Таблиця 5

Порівняння результатів перевірки гіпотези нормальності для II і III серії спостережень g за допомогою P_{χ^2} - критерія Пірсона.

№ серії / Назва пункту	Імовірність гіпотези нормальності P_{χ^2} .		
	Борова Гора	Юзефослав	Ксянж
II серія	31.38 %	79.36%	52.80 %
III серія	15.23 %	49.17 %	20.00 %

З точки зору КТПВ, спостереження II серії є більш досконалими, оскільки вони мають в середньому приблизно вдвічі більшу ймовірність P_{χ^2} . В категоріях НТПВ спостереження III серії краще, тому що вони ближче до ідеальної форми негаусових джеффісових похибок (8). Але до норм (9 - 11) цим вимірам ще далеко.

У гравіметрії є ряди найвищої якості, похибки яких близькі до норми Джеффріса (9). Наприклад, серія, отримана на Міжнародній гравіметричній станції № 5035, виконана гравіметром ГАБЛ (Московська обласна випробувальна база ІФЗ РАН) [Dzhun, at al., 1984]. Для цієї серії $m = 6,67 \pm 1,37$. Довірчий інтервал при $\alpha = 10\%$: $4.42 < 6.67 < 8.92$. Права його частина $m = 4.42$ накриває інтервал (9), що підтверджує

незначимість відхилення $m = 6.67$ від норми Джеффріса. Нехай P_G і $P_J - \chi^2$ – ймовірності того, що ряд в Ледово є вибіркою із гаусової і джеффрісової генеральних сукупностей. Тоді $P_G = 1,5\%$, $P_J = 46,6\%$ [Dzhun, at al., 1984], тобто, $P_J > P_G$ в 31 раз, що природньо, так як $m = 6.67$ істотно менше $m = \infty$, що властиво закону Гауса. Факт високої якості спостереження на ГАБЛ були підтверджені Міжнародним бюро мір і ваг (МБМВ, Париж, Севр), де є одна із найбільш точних стаціонарних установок для вимірювання g [Sakuma, 1973] і в результаті її порівняння з гравіметром Національного бюро стандартів США [Hammond & Faller, 1971; Arnautov et al., 1982].

У верхній частині розподілу g вимірювання в Юзефославі і Ксянжу замість вершини розподілу спостерігається платформа. Це свідчить про відсутність належного захисту гравіметра FG-5 від впливу мікросейсм, про що свідчить робота [Arnautov, et al., 1982, p. 18, fig. 5].

Висновок. З точки зору НТПВ, результати вимірів на всіх трьох пунктах (табл. 3), ще далекі від досконалості і повинні викликати серйозні підозри щодо впливу невиключених систематичних похибок. Саме ці помилки утримують розподіл похибок на цих пунктах в границях нормальності. Повністю випадкові похибки вимірів з $n > 500$ повинні мати форму джеффрісових похибок (8) з нормами (9-11).

Наукова новизна і практичне значення дослідження

В проведеному дослідженні використані методи НТПВ для вдосконалення методики вимірювань g , які виконуються в складній метрологічній обстановці з необхідністю врахування ряду нестаціонарних джерел систематичних похибок.

Практична значимість дослідження полягає у розробці алгоритму контролю за ймовірнісною формою розподілу вимірів g (табл. 2) з метою вдосконалення методології спостережень. Дослідження причин відхилень розподілу похибок від встановлених норм вже давно є необхідним елементом теорії точності виробництва [Borodachev, 1950] і процесу контролю нормативної роботи агрегатів та вимірювальних приладів. Реалізація таких підходів, які були вперше задіяні А. М. Колмогоровим і його школою, а потім реалізовані в НТПВ, вже давно є основною стратегією, яка забезпечує метрологічну грамотність проведення вимірів великого обсягу.

Заключення

1. Відповідно до принципів НТПВ, результати абсолютних високоточних вимірів g в Борова Гора, Юзефослав і Ксянж при ризику $\alpha = 5\%$ мають бути класифіковані як ефективні і спроможні оцінки.

Потрібно завжди пам'ятати, **що будь-який вимірювальний експеримент знаходиться в області допустимого оцінювання тільки в тому випадку, коли довірчий інтервал для асиметрії накриває нуль, а довірчий інтервал для ексцесу також накриває нуль або знаходиться в додатній області.**

2. Низьке значення P_{J2} - ймовірності, рівне 20,00%, для пункту Ксянж не значить, що ці спостереження є поганими. Навпаки, розподіл похибок на цьому пункті відхиляється від закону Гауса, відповідно до принципів НТПВ в хорошому напрямку: він має позитивний і майже значимий ексцес, тобто по своїй формі є найбільш близьким до джеффрісових похибок виду (8). Доказом того, що найкраща метрологічна ситуація була досягнута в пункті Ксянж, є той факт, що стандартна похибка вимірювання тут істотно менше, ніж на пунктах, і становить $4,86 \pm 0,12$ Гал. Вага одного виміру на пункті Юзефослав в 4,9, а на Борова Гора в 1,4 рази менше.

3. Згідно з категоріями НТПВ, близькість до нормальності розподілу похибок вимірів для розмірів вибірки $n > 500$ є застарілою доцільністю, далекою від ідеальної (8) з нормами (9-11). Іншими словами, нормальність похибок при $n > 500$ – це лише половина шляху до згаданих вище норм Джеффріса. **Суть стратегії постійного вдосконалення високоточних визначень g полягає в доведенні розподілу їх помилок до ідеалу (8) з нормою (9).** До речі, похибки вимірів абсолютного гравіметра ГАБЛ, створеного Інститутом автоматичної та електрометрії Сибірського відділення РАН, відповідають закону Пірсона-Джеффріса (8) з $m = 6.67 \pm 1.37$ [Dzhun, 1983; Dzhun et al., 1984], тобто, майже досягають норми (9).

4. Нормальність похибок високоточних вимірювань g при $n > 500$ означає лише те, що вагова функція (4) для таких спостережень дозволяє оцінювання, залишаючи похибки корельованими (невипадковими). Цю корельованість можна віднести до шумового поля (знехтувати нею) лише тоді, коли помилки вимірювання будуть слідувати формі (8) з нормами (9-11). Це досягається за рахунок більш глибокого вивчення джерел систематичних помилок з подальшим виключенням з результатів спостережень. **Слід завжди пам'ятати, що нормальність похибок вимірювань при $n > 500$ не є нормою, а є причиною серйозної заклопотаності щодо невиключених систематичних впливів.** Саме вони жорстко тримають емпіричні розподіли похибок в обіймах нормальності. Які причини систематичних помилок - вплив Місяця, тренди енергії і частоти мікросейсм, гравітаційного впливу атмосфери, її тиску, температури, особливостей місця спостереження, тощо – це потрібно ще виявити. Гравіметристів чекає цілеспрямована робота для того, щоб позбавити визначення g від систематичних помилок і привести їх розподіли до ідеалу (8), а ексцес до норми (10). Успіхам цієї роботи сприятимуть знайомство з фундаментальними працями Г. Джеффріса [Jeffreys, 1937, 1939, 1998; Dzhun, 1992, 2015, 2017].

5. Чи можна не реагувати на сучасні розробки в області теорії похибок і аналізу даних, не помічати і навіть ігнорувати висновки Г. Джеффріса і концепції НТПВ? Звичайно, можна! Однак при цьому існує величезний ризик залишитися вічно в обіймах рутинного обскурантизму, закриваючи перспективи якісних змін у способі вдосконалення спостережень при вивченні однієї з головних загадок сучасної науки - тайни гравітації. Крім того, слід пам'ятати, що НТПВ не відхиляє КТПВ Гауса, вона зберігає її як свій необхідний елемент і стоїть на її плечах, долаючи парадокс Ельясберга-Хампеля [Dzhun, 2015] при $n > 500$. Завжди, перш ніж застосовувати процедури НТПВ, застосовуються спочатку методи КТПВ, оскільки немає нічого подібного до них по своїй простоті і ясності.

Список літератури

- Arnautov, G. P., Koronkevich, V. P., & Stus, Yu. F., (1982). The Interferometer of the absolute lasers ballistic gravimeter. Institut avtomatici i elektrometrii SO AN USSR, Novosibirsk, Preprint 196. 37 p.
- Bessel, F. W. (1818). *Fundamenta astronomiae*. Königsberg.
- Bessel, F. W. (1838). Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungs-fehler. *Astronomische Nachrichten*, b. 15, 369.
- Bolshev, L. N., & Smirnov, N. V. (1983). *Tables of Mathematical Statistics*. Moscow: Science. (in Russian).
- Borodachev, N. A. (1950). The Main Questions of the accuracy of the Theory of Manufacture. Editor A. N. Kolmogorov. Moscow – Leningrad: AS USSR Publ., 360 p, [In Russian].
- Bruevich, N. G. (Editor). (1973). *Production Accuracy in the Mechanic and Instrument engineering*.
- Cramér, H. (1946). *Mathematical methods of statistics*. 1946. *Department of Mathematical SU*.
- Doolittle, C. L. (1910). Results of Observations with the zenith telescope and the Wharton reflex zenith tube. *The Astronomical Journal*, XXVI, 608, Albany.
- Doolittle, C. L. (1912). Results of observation with the zenith telescope and the Wharton reflex zenith tube. *The Astronomical Journal*, 27, 133–138.
- Dvulit, P., & Dzhun, I. (2017). Application of methods of the non-classical error theory in absolute measurements of Galilean acceleration. *Geodynamics*, (22), 7–15.
- Dzhun, I. V. (1969). Pearson Distribution of type VII in the errors of Observations of Latitude Variations. *Astrom. Astrofiz.* 2, 101–115.
- Dzhun, I. V. (1974). Analysis of parallel Latitudinal Observations performed under the general program. Extended abstract of Cand. Degree of Phis. - Math. Sci.: spec. 01.03.01 “Astrometry and Celestial Mechanics”. Kyiv: Institut matematiki AN USSR.
- Dzhun, I. V. (1983). Fluctuations in Weight of Individual Measurements of the Gravity Acceleration and the Way of their Account for ballistic Observations Processing. In *Repeated Gravity Observations: Theory and Results*. Moscow: MGK Prezidium AS USSR, Neftgeofizika Publ., 46–52.
- Dzhun, I. V., Arnautov G. P., Stus Yu. F., Shcheglov S. N. (1984). Feature of the Dis-tribution Law for the Results of Ballistic Measurement of the Gravity Acceleration. *Repeat Gravimetric Observations: Theory and Results*. Moscow: MGK Prezidium AS USSR, Neftgeofizika Publ., 87–100.
- Dzhun, I. V. (1992). *Mathematical Treatment of Astronomical and Space-Based Information in non-Gaussian Observation Errors*. Extended Abstract of Doctoral Dissertation in Physics and Mathematics. Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.
- Dzhun, I. V. (2012). Distribution of errors in multiple large-volume observations. *Measurement Techniques*, 55, 393–396., Springer.
- Dzhun, I. V. (2015). *The Non-classical Errors Theory of Measurements*. Rivne: Estero Publ., 168 [in Russian].
- Dzhun, J. V. (2017). A new important tool in the field of intelligent data analysis. *Alcide De Gasperi University of Euroregional Economy in Jozefow. Intercultural Communication*, 1/2, 162–175.
- Eddington, A. S. (1933). Notes on the method of least squares. *Proceedings of the Physical Society*, 45(2), 271.
- Fedorov, E. P. (1963). Nutation and forced motion of the Earth's pole from the data of latitude observations. *Oxford, New York, Pergamon Press*.
- Gauss, C. F. (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Vol. 7). Perthes et Besser.
- Gauss, C. F. (1823). *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (Vol. 1). Henricus Dieterich.
- Geary, R. C. (1947). Testing for Normality. *Biometrika*, 34, 209–242.
- Hammond, J. A., & Faller, J. E. (1971). A laser-interferometer system for the absolute determination of the acceleration due to gravity. *Precision Measurement and Fundamental Constants; Proceedings*, 343, 457.
- Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., & Stahel, W. A. (1986). *Robust statistics* (pp. 29–30). New York: Wiley.
- Hulme, H. R., & Symms, L. S. T. (1939). The law of error and the combination of observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 99, 642.

- Idelson, N. I. (1947). Method of Least Squares and the Theory of Math. Treatment of Observations). [In Russian]. Geodezizdat. Moscow – Leningrad.
- Jeffreys, H. (1938). The law of error and the combination of observations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 237(777), 231–271.
- Jeffreys, H. (1939). The law of error in the Greenwich variation of latitude observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 99, 703.
- Jeffreys, H. (1998). *The theory of probability*. OUP Oxford.
- Lucacs, E. A. (1942). A Characterization of the normal Distribution. *Annals of Mathematical Statistics*. 13, 91–93.
- Newcomb, S. (1886). A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result. *American journal of Mathematics*, 343–366.
- Ogorodnikov, K. F. (1928). Procedure for Reducing Observations by introducing Mean Weights in application to Statistical Study of Stellar Motions, *Astron., Journ.*, 5(1), 1–21.
- Pearson, K. (1902). On the Mathematical Theory of Errors of Judgment with special Reference to the Personal Equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A.*, 198, 235–296.
- Sakuma, A. (1973). A permanent station for the absolute determination of gravity approaching one microgal accuracy. Proc. Symposium on Earth's gravitational field and secular variations in position. University of N. S. W., Sidney. p. 674–684.
- Student. (1927). Errors of routine analysis. *Biometrika*, 151–164.
- Tukey, J. W. (1960). A survey of sampling from contaminated distributions. *Contributions to probability and statistics*, 448–485.
- Tukey, J. W. (1962). The future of data analysis. *The annals of mathematical statistics*, 33(1), 1–67.

P. DVULIT¹, J. DZHUN²

¹ Department of Higher Geodesy and Astronomy, Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandera, Str., Lviv, Ukraine, 79013, e-mail: dvupet@ukr.net.

² Department of Mathematical Modeling, International University of Economics and Humanities named after Academician Stepan Demianchuk, 4, S. Demianchuk Str., Rivne, Ukraine, 33027, e-mail: iosif-june@rambler.ru.

DIAGNOSTICS OF THE HIGH-PRECISE BALLISTIC MEASURED GRAVITY ACCELERATION BY METHODS OF NON-CLASSICAL ERRORS THEORY

The purpose of the investigation is to show the necessity of using modern ideas about the law of error distribution for observations involved in the categories of the “Non-classical error theory of measurements” (NETM) in the process of performing high-precision ballistic definitions of gravitational acceleration. These definitions are characterized by large volumes, which according to the H. Jeffreys’ theory, professor at the University of Cambridge, automatically takes them beyond the bounds of the classical concepts about the errors of measurements law. These outdated views about the distribution law of errors of large volume measurements are the main obstacles to improve the methodology of these highly precise and important definitions. **The research methodology** is provided by the NETM-procedures that was designed to control the probabilistic form of the statistical distribution of absolute high-precise ballistic measurements g with large sample volumes based on H. Jeffreys’ recommendations and on the principles of hypothesis testing theory. **The main result** of the research is to carry out NETM-diagnostics of a metrological situation with the ballistic gravimeter FG-5 after some improvements of the program of the observation. This method of diagnostics is based on the use confidence intervals to the estimates of asymmetry and kurtosis of the obtained samples of measurements g with the following application of the Pearson’s χ^2 -test to determine the significance of the deviations of its distribution from the established norms. In accordance with the categories of the NETM, such norms are the Gauss’s and Person-Jeffreys’s laws, since only they ensure the non-singularity of the weight function of the sample, and therefore the possibility of obtaining non generate estimates g during the mathematical processing of measurements. **Scientific novelty**: using the possibilities of the new important tool in the field «Data analysis» using the NETM to improve the technique of the high-precise measurements g , which are performed in a complicated metrological situation with the necessity of taking into account a number of non-stationary sources of systematic errors. **The practical significance** of the research is in use of NETM-diagnostics of the probabilistic form of the distribution of measurements g in order to improve the methodology of these highly precise determinations. The investigation seeks reasons for the deviations of errors distributions from established norms providing metrological literacy of the high-precise large-scale measurements.

Key words: laws of errors Gauss and Pearson-Jeffreys, absolute measurements gravity acceleration, non-classical errors theory.

Надійшла 15.05.2019 р.