УДК 621.01

О. С. Ланець, В. М. Боровець, Р. Я. Качмар*
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра механіки та автоматизації машинобудування
*кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

ОБҐРУНТУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ДОВЖИНИ ДОВГОВИМІРНОГО РОБОЧОГО ОРГАНА ВІБРАЦІЙНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ

Наводиться аналітична залежність, що встановлює для довговимірного вібраційного транспортного засобу раціональну довжину робочого органа як тіла з розподіленою масою, за умови унеможливлення збігу його власної частоти коливань з вимушеною.
Ключові слова: вібраційний конвеєр, власна частота коливань, резонанс.

The article deduces an analytical dependence that establishes for a long vibration vehicle a rational length of a working body, as a body with a distributed mass, since it is impossible to match its own frequency of oscillations with the forced.
Key words: vibration conveyor, natural frequency, resonance.

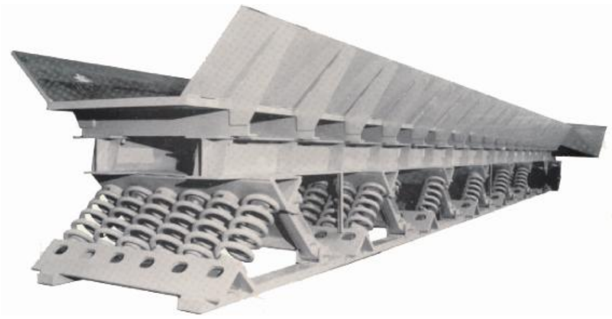
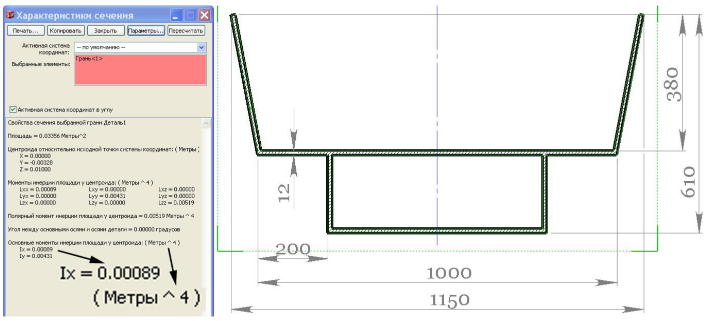
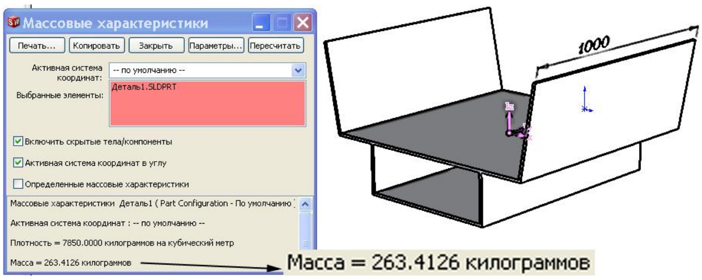


Рис. 1. Вібраційний живильник виробництва фірми Carrier Vibrating Equipment, Inc. (США)



а



б

Рис. 2. Визначення моменту поперечного перерізу (а) та погонної маси (б) жолоба робочого органа вібраційного живильника у програмному продукті SolidWorks

Вступ. Для стабільного та рівномірного вібраційного транспортування виробів необхідно забезпечити власну частоту коливань робочого органа, як тіла з розподіленою масою, принаймні у $3\mathbf{K}4$ рази вищою за вимушену. Тобто необхідно, щоб на частоті вимушених коливань робочий орган здійснював коливальний рух як абсолютно тверде тіло, тобто був достатньо жорстким і водночас легким, конструктивно простим та дешевим у виготовленні.

Аналіз останніх досліджень та постановка проблеми. Розглянемо випадок довговимірного робочого органа, наприклад, вібраційного живильника з дебалансним приводом, що приводиться в рух від асинхронних двигунів (рис. 1). Його довжину вибирають як з конструктивних міркувань, так і з умови можливості накопичення певного запасу маси середовища завантаження. За рекомендаціями [1], максимальну довжину можна приблизно встановити за

$$L_{\max} = 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{E\,J}{\rho_n\,\Omega^2}}\,, \qquad (1)$$

де E – модуль пружності матеріалу жолоба на розтяг, $Па$; J – момент інерції поперечного перерізу жолоба, $м^4$; ρ_n – погонна маса жолоба (маса жолоба завдовжки $1\ м$), $кг/м$; $\Omega = \omega$ – колова частота вимушених коливань, $рад/с$.

Нехай момент інерції поперечного перерізу жолоба проектованого живильника (рис. 2, *а*) становитиме $J = 8.9 \cdot 10^{-4}\,м^4$, а його погонна маса з врахуванням маси завантаження $\rho_n \approx 350\ кг/м$ (рис. 2, *б*). Модуль пружності жолоба зі сталі $E = 2.05 \cdot 10^{11}\,Па$, колова частота вимушених коливань становить $\omega = \Omega = 149\ рад/с \equiv 23.7\ Гц$ (близько 1420 *обертів/хв* для асинхронного двигуна, синхронна частота якого 1500 *обертів/хв*). У такому випадку максимально можлива довжина робочого органа згідно з (1) становить:

$$L_{\max} = 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho_n \Omega^2}} = .$$

$$= 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{2.05 \cdot 10^{11} \cdot 0.00089}{350 \cdot 149^2}} = 6.65\ м$$

Виконання умови (1) унеможливить виникнення паразитних коливань на робочій частоті живильника. Тобто тіло поводитиме себе, як абсолютно тверде. Забезпечивши значення маси погонного метра на рівні $\rho_n \approx 350\ кг/м$ (рис. 3, *а*), ми бачимо, що за довжини жолоба $L_{\max} = 6.65\ м$ його перша власна циклічна частота, як тіла з розподіленою масою, становить $\nu_в = 54.5\ Гц$ (рис. 3, *б*) і є в 2.3 *раза* вищою за вимушену $N = 23.7\ Гц$. Отримане значення першої власної частоти коливань робочого органа є достатнім для того, щоб вважати робочий орган абсолютно твердим тілом під час роботи живильника на частоті вимушених коливань. Проте необхідно відобразити послідовність виведення цієї формули, щоб досконаліше зрозуміти її суть і тим самим перевірити її правильність.

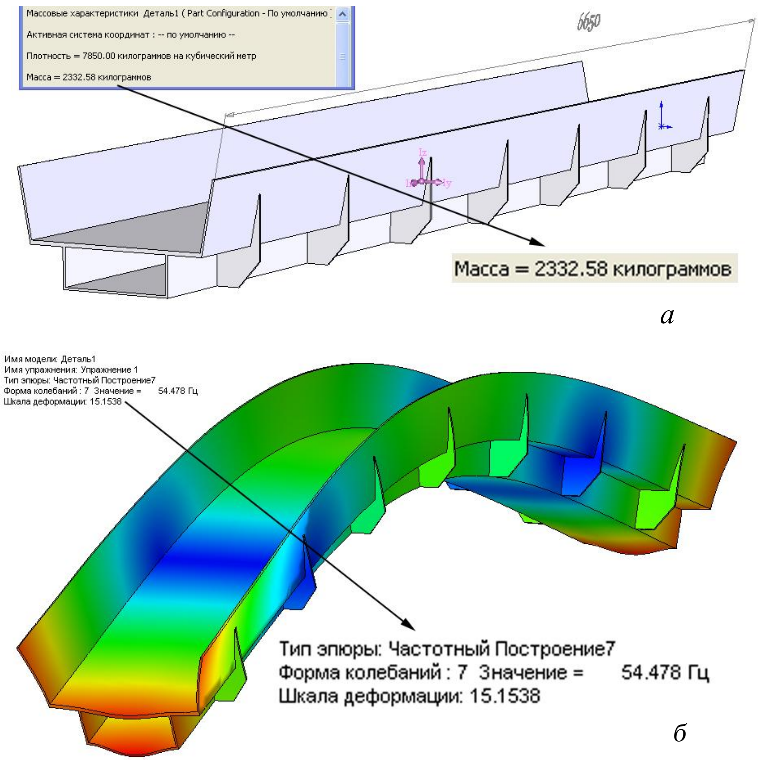


Рис. 3. Визначення маси робочого органа вібраційного живильника (а) та встановлення його першої власної частоти коливань у програмному продукті SolidWorks (б)

Виклад основного матеріалу. Як отримано формулу (1)? Для спрощення розрахунків власних частот можна використати метод, який застосовується для стрижня з умови, що його момент інерції поперечного перерізу буде ідентичний з перерізом жолоба (рис. 4). Розглянемо тільки поперечні коливання у площині його відображення, вважаючи, що у жолоба це найпіддатливіший напрям. Рівняння вільних коливань стрижня як тіла з розподіленою масою має такий вигляд [2]:

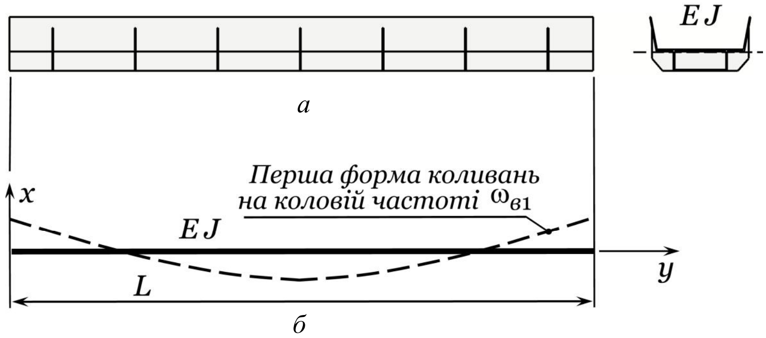


Рис. 4. Робочий орган вібраційного живильника у вигляді жолоба (а) завдовжки $L = L_{\max}$ та його схема заміщення у вигляді балки з вільними кінцями (б)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \mathbf{h}^2 \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = 0, \tag{2}$$

де

$$\mathbf{h} = \sqrt{EJ/\rho_n} \,. \tag{3}$$

Найпростішим періодичним розв'язком рівняння (2) є функція $x(y,t)$ відхилень точок осі жолоба за поперечних коливань, яка змінюється в часі за гармонічним законом:

$$x(y,\, t) = \mathrm{f}\,(y)\,\sin(\omega\, t + \boldsymbol{z}\,)\,, \tag{4}$$

де $\boldsymbol{z}$ – зсув фаз; $\mathrm{f}\,(y)$ – функція, що встановлює закон розподілу (по довжині y жолоба) амплітудних значень відхилень точок на осі жолоба (вздовж x) від положення рівноваги і називається формою головного коливання або власною формою. Цих форм безліч і кожній відповідає певне значення власної частоти $\omega_в$. Для того, щоб отримати рівняння власних форм, підставимо (4) у (2). Після скорочення на $\sin(\omega\, t + \boldsymbol{z}\,)$ отримаємо:

$$\mathrm{f}^{\,\mathrm{IV}}(y) - \mathrm{k}^4 \mathrm{f}\,(y) = 0, \tag{5}$$

де

$$\mathrm{k}^4 = \frac{\rho_n \omega^2}{EJ}\,. \tag{6}$$

Рівняння (5) має такі чотири незалежні часткові розв'язки: $\cos(\mathrm{k}y)$, $\sin(\mathrm{k}y)$, $\mathrm{ch}(\mathrm{k}y)$, $\mathrm{sh}(\mathrm{k}y)$, а його загальний розв'язок запишеться як

$$\mathrm{f}\,(y) = A\cos(\mathrm{k}y) + B\sin(\mathrm{k}y) + C\,\mathrm{ch}(\mathrm{k}y) + D\,\mathrm{sh}(\mathrm{k}y). \tag{7}$$

Цей розв'язок містить чотири довільні сталі C_1, C_2, C_3, C_4, які повинні бути визначені з крайових умов для функції $\mathrm{f}\,(x)$, тобто з умов закріплення кінців жолоба. Для звичайних умов кількість крайових умов дорівнює кількості довільних сталих – по два на кожному кінці. Усі вони визначаються із рівності нулю двох із таких чотирьох величин $\mathrm{f}\,(y)$, $\mathrm{f}'(y)$, $\mathrm{f}''(y)$, $\mathrm{f}'''(y)$. Саме відхилення та відповідні його похідні відповідають прогину, куту повороту, згинальному моменту і поперечній силі в крайніх точках $y = 0$ та $y = L$. У нашому випадку крайові умови для жолоба з вільними кінцями мають такий вигляд:

$$\mathrm{f}''(0) = \mathrm{f}'''(0) = 0; \qquad \mathrm{f}''(l) = \mathrm{f}'''(L) = 0\,, \tag{8}$$

адже згинальний момент і поперечна сила у перерізі відсутні. Друга та третя похідні рішення (7) у загальному вигляді запишуться так:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x}\mathrm{f}\,(y) = -C_1\,\mathrm{k}^2\cos(\mathrm{k}y) - C_2\,\mathrm{k}^2\sin(\mathrm{k}y) + C_3\,\mathrm{k}^2\,\mathrm{ch}(\mathrm{k}y) + C_4\,\mathrm{k}^2\,\mathrm{sh}(\mathrm{k}y)\,; \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}^3 x}\mathrm{f}\,(y) = C_1\,\mathrm{k}^3\sin(\mathrm{k}y) - C_2\,\mathrm{k}^3\cos(\mathrm{k}y) + C_3\,\mathrm{k}^3\,\mathrm{sh}(\mathrm{k}y) + C_4\,\mathrm{k}^3\,\mathrm{ch}(\mathrm{k}y)\,. \tag{10}$$

Отже, за $y = 0$ вирази (9) та (10) набудуть такого вигляду:

$$-C_1\,\mathrm{k}^2 + C_3\,\mathrm{k}^2\,; \tag{11}$$

$$-C_2\,\mathrm{k}^3 + C_4\,\mathrm{k}^3\,. \tag{12}$$

За $y = L$ вирази (9) та (10) перепишуться так:

$$-C_1\,\mathrm{k}^2\cos(\mathrm{k}L) - C_2\,\mathrm{k}^2\sin(\mathrm{k}L) + C_3\,\mathrm{k}^2\,\mathrm{ch}(\mathrm{k}L) + C_4\,\mathrm{k}^2\,\mathrm{sh}(\mathrm{k}L)\,; \tag{13}$$

$$C_1\,\mathrm{k}^3\sin(\mathrm{k}L) - C_2\,\mathrm{k}^3\cos(\mathrm{k}L) + C_3\,\mathrm{k}^3\,\mathrm{sh}(\mathrm{k}L) + C_4\,\mathrm{k}^3\,\mathrm{ch}(\mathrm{k}L)\,. \tag{14}$$

Прирівнявши вирази (11)–(14) до нуля, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -C_1 k^2 + C_3 k^2 = 0; \\ -C_2 k^3 + C_4 k^3 = 0; \\ -C_1 k^2 \cos(kL) - C_2 k^2 \sin(kL) + C_3 k^2 \operatorname{ch}(kL) + C_4 k^2 \operatorname{sh}(kL) = 0; \\ C_1 k^3 \sin(kL) - C_2 k^3 \cos(kL) + C_3 k^3 \operatorname{sh}(kL) + C_4 k^3 \operatorname{ch}(kL) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

з якої і отримаємо необхідний розв'язок. Сталі C_1, C_2, C_3, C_4, що визначають власну форму (функцію $f(y)$), нас не цікавлять. Нам важливо встановити власну частоту. Тому (15) у матричному вигляді можна подати як:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -k^2 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & -k^3 & 0 & k^3 \\ -k^2\cos(kL) & -k^2\sin(kL) & k^2\operatorname{ch}(kL) & k^2\operatorname{sh}(kL) \\ k^3\sin(kL) & -k^3\cos(kL) & k^3\operatorname{sh}(kL) & k^3\operatorname{ch}(kL) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Нас цікавить матриця коефіцієнтів за невідомих, яку називають ще частотною. Її визначник дорівнює

$$k^{10}[\operatorname{ch}^2(kL) - \operatorname{sh}^2(kL) - 2\operatorname{ch}(kL)\cos(kL) + \cos^2(kL) + \sin^2(kL)]. \tag{17}$$

Спростивши (17) та прирівнявши отриманий вираз до нуля

$$1 - \operatorname{ch}(kL)\cos(kL) = 0, \tag{18}$$

його коренем (без нульового кореня) буде значення (рис. 5):

$$kL = 4.73. \tag{19}$$

Тоді вираз (6) можна переписати як

$$\frac{(4.73)^4}{L^4} = \frac{\rho_n \omega^2}{EJ}. \tag{20}$$

З (20) перша власна колова частота коливань визначатиметься за такою формулою:

$$\omega = \omega_{в1} = 22.37\sqrt{\frac{EJ}{\rho_n L^4}}, \tag{21}$$

а максимально можлива довжина жолоба буде:

$$L_{\max} = 4.73 \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho_n \omega^2}}. \tag{22}$$

Перейшовши на циклічну частоту коливань, вирази (21) та (22) перепишуть у такому вигляді:

$$\nu = \nu_{в1} = \frac{22.37}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho_n L^4}} = 3.56 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n L^4}}; \tag{23}$$

$$L_{\max} = 1.89 \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho_n \nu^2}}. \tag{24}$$

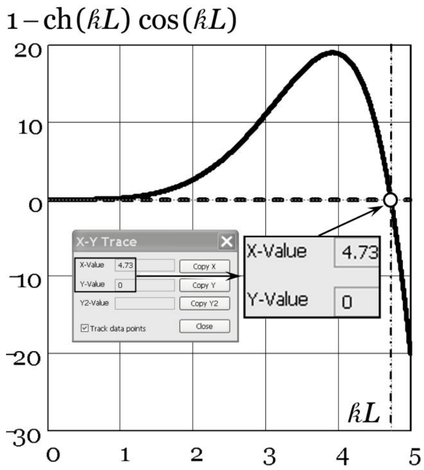


Рис. 5. Вікно програмного продукту MathCAD, у якому відображений розв'язок рівняння (18)

Проте у формулі (1) числовий коефіцієнт замість 4.73 (вираз (22)) становить 3, що пов'язано із закладанням півторакратного запасу за довжиною (допустима довжина жолоба скорегована у менший бік). Це збільшує першу власну частоту коливань тіла з розподіленою масою, унеможливлюючи збіг її з вимушеною.

Спробуємо зіставити результат розрахунку власної частоти жолоба виконаним методом скінченних елементів (рис. 3, *б*) з результатом, отриманим за формулою (23). Так, перша власна циклічна частота коливань становить

$$\nu_{в1} = 3.56 \cdot \sqrt{\frac{2.05 \cdot 10^{11} \cdot 0.00089}{350 \cdot 6.65^4}} = 58.1 \ Гц ,$$

і зважаючи, що розрахунок наближений, він добре узгоджується з результатами числового аналізу.

Висновок. З проведеного аналізу зрозуміло, що формула (1) є правильною і її можна застосовувати під час розрахунку власних частот довговимірних робочих органів вібраційних транспортних засобів. Недоліком цієї формули є те, що вона встановлює тільки поздовжні згинальні коливання, не враховуючи крутних.

1. Спиваковский А. О. Транспортирующие машины: учеб. пособ. для машиностроительных вузов; 3-е изд., перераб. / А. О. Спиваковский, В. К. Дьячков. – М.: Машиностроение, 1983. – 487 с. 2. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 650 с. 3. Синтез конструкції та дослідження роботи резонансного двомасового вібраційного стола з електромагнітним приводом / О. С. Ланець, В. М. Боровець, О. В. Ланець, Я. В. Шпак, В. І. Лозинський // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Український міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2015. – № 49. – С. 36–60.