

**В. І. Гавриш, Р. Р. Шкраб**

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

**ТЕМПЕРАТУРНІ РЕЖИМИ В ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТАХ ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЇВ,
СПРИЧИНЕНІ ЛОКАЛЬНИМ НАГРІВАННЯМ**

Розроблено нелінійні математичні моделі аналізу температурних режимів у термочутливій ізотропній пластині, яка нагрівається локально зосередженими джерелами тепла. Для цього теплоактивні зони пластини описано з використанням теорії узагальнених функцій. З огляду на це, рівняння теплопровідності та крайові умови містять розривні та сингулярні праві частини. За допомогою перетворення Кірхгофа лінеаризовано вихідні нелінійні рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови. Для розв'язування отриманих крайових задач використано інтегральне перетворення Фур'є і внаслідок цього визначено їх аналітичні розв'язки в зображеннях. До цих розв'язків застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є, яке дало змогу отримати аналітичні вирази для визначення змінної Кірхгофа. Як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. Внаслідок цього отримано аналітичні співвідношення для визначення температури в термочутливій пластині. Наведені аналітичні розв'язки подано у вигляді невластних збіжних інтегралів. За методом Ньютона (трьох восьмих) отримано числові значення цих інтегралів з певною точністю для заданих значень товщини пластини, просторових координат, питомої потужності джерел тепла, коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів пластини та геометричних параметрів теплоактивної зони. Матеріалом пластини виступають кремній та германій. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу теплообмінних процесів у середині пластини, зумовлених локальним нагріванням, розроблено програми засоби, із використанням яких виконано геометричне відображення розподілу температури залежно від просторових координат, коефіцієнта теплопровідності, питомої густини теплового потоку. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність розроблених математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у термочутливій пластині з локальним нагріванням, реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати такі середовища, які піддаються локальним тепловим навантаженням, щодо їх термостійкості. Як наслідок, можливо її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле; ізотропна термочутлива пластина; теплопровідність; теплоізолювана поверхня; ідеальний тепловий контакт; локальне нагрівання.

Вступ

На сьогодні суспільство характеризується високим рівнем використання електронних пристроїв сучасної техніки для різноманітних потреб. Їх експлуатують у певних температурних режимах, що призводять до потреби забезпечення надійної роботи, зменшення ваги і габаритів (мініатюризації), збільшення терміну служби. Внаслідок мініатюризації пристроїв та їх елементів у невеликих об'ємах концентруються високі потужності тепловиділення. Причому, під час експлуатації мікроелектронні пристрої піддаються впливу як внутрішніх теплових потоків, так і зовнішніх. Тому залишається актуальною задача визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у окремих елементах та вузлах електронних пристроїв, оскільки саме температура є вагомим фактором, який значно впливає на їх ефективну роботу. На діаграмі (рис. 1) наведено вплив різних зовнішніх чинників на надійність роботи мікроелектронних пристроїв.

Дослідження свідчать, що кількість відмов під час експлуатації мікроелектронних пристроїв тісно пов'язана з рівнем температури. Так, для германієвих елементів кількість відмов для температури 140 °C у 7,5 разів є більшою, ніж для температури 20 °C. Ще більшою є ця кількість для кремнієвих елементів. Температурний рі-

вень в елементах мікроелектронних пристроїв може зростати внаслідок підвищення температури докільця, нагрівання від сусідніх елементів, які виділяють тепло, теплової потужності самих елементів та пристроїв.

Тому моделювання процесів поширення тепла у різних конструкціях та їх елементах є важливим напрямом теоретичних та практичних досліджень. Відомо, що елементи сучасних електронних пристроїв піддаються впливу внутрішнього нагрівання внаслідок експлуатації. Саме тому задачі математичного моделювання процесів, пов'язаних із теплоперенесенням, не втрачають актуальності й зараз, адже аналіз розв'язків таких задач має велике наукове, практичне, а також і економічне значення.

Експериментальні дослідження полів температури у різних конструкціях і, зокрема, у мікроелектронних пристроях не завжди дають можливість отримати необхідні результати для аналізу теплової поведінки пристрою. Варто зазначити також, що у багатьох випадках такі експерименти є просто неможливими. Тому математичне моделювання процесів, пов'язаних із теплообміном, залишається важливим напрямом наукових досліджень. Вагомою особливістю моделювання та аналізу процесу теплопровідності в елементах конструкцій, зокрема мікроелектронних пристроїв, є врахування впливу внутрішніх джерел тепла.

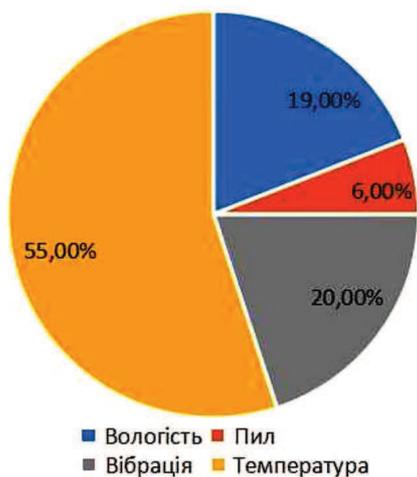


Рис. 1. Вплив різних зовнішніх чинників на надійність роботи мікроелектронних пристроїв

Отже, проблема розроблення нових математичних моделей як для однорідних середовищ, так і для неоднорідних, а також удосконалення уже розроблених математичних моделей для аналізу процесу теплопровідності та теплообміну, і надалі залишається актуальною.

Об'єкт дослідження – процес теплопровідності в термочутливих середовищах із локальним нагріванням.

Предмет дослідження – нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для термочутливих середовищ із локальним нагріванням.

Мета роботи – розробити нелінійні математичні моделі теплопровідності для пластини, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла та тепловим потоком, зосередженим на її межовій поверхні, які дають змогу підвищити точність визначення температурного поля, що надалі вплине на ефективність методів проектування пристроїв цифрових технологій.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі *основні завдання дослідження*:

- проаналізувати основні літературні джерела в напрямі розроблення нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- навести об'єкт дослідження та його математичні моделі;
- отримати аналітичні розв'язки нелінійних крайових задач теплопровідності;
- розробити алгоритм та програмні засоби його числової реалізації для аналізу температурних режимів у термочутливій пластині.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – удосконалено спосіб лінеаризації нелінійних моделей теплопровідності для термочутливих середовищ із локальним нагріванням, що дало змогу отримати в замкнутому вигляді аналітичні розв'язки відповідних нелінійних крайових задач.

Практична значущість результатів дослідження – отримані аналітичні розв'язки нелінійних крайових задач теплопровідності для термочутливого середовища з локальним нагріванням дають змогу розробляти алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу температурних режимів у окремих конструкційних елементах та вузлах цифрових пристроїв з метою прогнозування їхніх режимів роботи, ідентифікування невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їхній термін експлуатації.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних полів та аналіз температурних режимів як в однорідних [2], [10], [11], так і в неоднорідних [13], [14], [15] середовищах привертає увагу багатьох дослідників.

У роботі [3] наведено ізотропні пологі тонкі оболонки, що нагріваються внутрішніми джерелами тепла, зосередженими у квадраті та еліпсі, на межових поверхнях яких відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем. Задачу теплопровідності розв'язано за умов, коли температура навколишнього середовища є сталою, а на безмежності дорівнює нулю. Теплові джерела з інтенсивністю, що дорівнює одиниці, розміщено на серединній поверхні, де вибрано початок системи координат. Об'ємну густину джерел нагрівання описано за допомогою двовимірної функції Дірака. Досліджено поведінку температурного поля у середовищі та залежність температури від відстані до джерел тепла.

Розроблено інженерну методику дослідження теплових режимів у елементах та вузлах конструкцій радіоелектронної апаратури, яка ґрунтується на розв'язанні рівняння теплопровідності для прямокутного паралелепіпеда з джерелами тепла такої ж геометричної форми. Розроблені модель та алгоритм визначення та аналізу теплових режимів в елементах конструкцій – стійка, блок, мікросхема електронної апаратури дає можливість отримати значення температури для довільної точки структури в аналітичному вигляді. Із розв'язку рівняння теплопровідності отримано співвідношення для визначення ефективної теплопровідності елементів конструкції вздовж основних координатних осей із врахуванням максимально заданого їх перегрівання [1].

У працях [4], [5], [6] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних та шаруватих конструкціях із чужорідними вclusions канонічної форми. У роботах [8], [12] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися моделі, які б враховували інтенсивні температурні збурення у конструкціях, зумовлені локально зосередженими джерелами тепла. Це приводить до розроблення математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у елементах складних електронних і електромеханічних систем, які функціонують у подібних температурних режимах. Результати досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування наведених систем щодо їх термостійкості.

Результати досліджень та їх обговорення

Об'єкт дослідження та його математична модель. 1. Розглянемо ізотропну відносно теплофізичних

параметрів термочутливу (теплофізичні параметри конструкційного матеріалу залежать від температури) пластину товщиною 2δ з теплоізованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$, віднесена до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) . В середині пластини в об'ємі паралелепіпеда $V = 8hd\delta$ діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = const$. На межових поверхнях $K_1 = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ та $K_2 = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ пластини задано крайові умови другого роду (рис. 2).

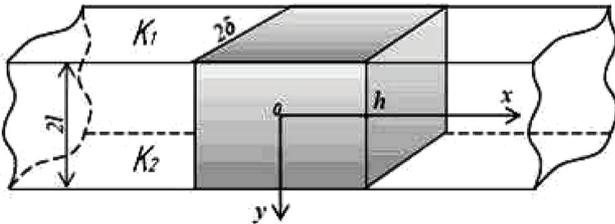


Рис. 2. Ізотропна пластина з внутрішніми джерелами тепла

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y , який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [8], [12]

$$\operatorname{div}(\lambda(t)\operatorname{grad}t(x, y)) = -q_0 S_-(h - |x|) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{|y|=l} = 0, \quad (2)$$

де: $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності термочутливої пластини; $S_-(\zeta)$ – асиметрична одинична функція [9],

$$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases}$$

Введемо перетворення Кірхгофа [8], [12]

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{t(x, y)} \lambda(\zeta) d\zeta, \quad (3)$$

де λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності термочутливої пластини.

Продиференціюємо вираз (3) за змінними x та y . Внаслідок цього отримуємо співвідношення

$$\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \lambda^0 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, \quad \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial y} = \lambda^0 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}, \quad (4)$$

після підстановки яких у (1), отримуємо лінійне диференціальне рівняння відносно функції $\mathcal{G}(x, y)$

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(h - |x|), \quad (5)$$

де Δ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Крайові умови для функції $\mathcal{G}(x, y)$ із використанням співвідношень (3), (4) запишемо так:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right|_{|y|=l} = 0. \quad (6)$$

Внаслідок цього із використання перетворення Кірхгофа (3) нелінійну крайову задачу теплопровідності (1), (2) зведено до лінійної задачі (5), (6).

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (5) і крайових умов (6), отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\mathcal{G}}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\mathcal{G}} = -\frac{2q_0}{\sqrt{2\pi} \lambda^0 \xi^3} \sin \xi h \quad (7)$$

за крайовою умовою

$$\left. \frac{d \bar{\mathcal{G}}}{dy} \right|_{|y|=l} = 0, \quad (8)$$

де: $\bar{\mathcal{G}}(y)$ – трансформанта функції $\mathcal{G}(x, y)$,

$\bar{\mathcal{G}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{G}(x, y) d\xi$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є, $i^2 = -1$.

Загальний розв'язок рівняння (7) знайдемо за допомогою методу варіації сталих у вигляді

$$\bar{\mathcal{G}}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} + \frac{2q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi} \xi^3} \sin \xi h, \quad (9)$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування.

Використавши крайову умову (8) для визначення сталих інтегрування, отримуємо розв'язок задачі (7), (8)

$$\bar{\mathcal{G}}(y) = \frac{2q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi} \xi^3} \sin \xi h. \quad (10)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (10), одержимо вираз (11), яким визначено змінну Кірхгофа

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{2q_0}{\lambda^0 \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^3} \sin \xi h d\xi. \quad (11)$$

Шукане температурне поле для термочутливої пластини визначаємо за допомогою нелінійного рівняння, яке отримуємо з використанням співвідношень (3), (11), після підстановки в них конкретного виразу залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу від температури.

2. Розглянемо випадок, коли геометричні параметри теплоактивного паралелепіпеда h, δ є малими, порівняно зі шириною пластини $2l$. З огляду на це, температурне поле у такому середовищі визначаємо розв'язанням рівняння теплопровідності [8], [12]

$$\operatorname{div}(\lambda(t)\operatorname{grad}t(x, y)) = -q_0 \delta(x), \quad (12)$$

де: $\delta(\zeta) = \frac{dS(\zeta)}{d\zeta}$ – дельта-функція Дірака; $S(\zeta)$ – симетрична одинична функція [9]; $S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0 \\ 0,5, & \zeta = 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases}$.

Застосуємо до рівняння (12) перетворення Кірхгофа (3), внаслідок чого отримуємо

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{q_0}{\lambda^0} \delta(x). \quad (13)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до нього, отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\mathcal{G}}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\mathcal{G}} = -\frac{q_0}{\sqrt{2\pi} \lambda^0},$$

розв'язок якого з урахуванням крайової умови (8) визначимо у вигляді

$$\bar{\mathcal{G}}(y) = \frac{q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi} \xi^2}. \quad (14)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (14), отримуємо розв'язок задачі (13) і (6) в такому вигляді:

$$\vartheta(x, y) = \frac{q_0}{\lambda \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^2} d\xi,$$

яким визначено змінну Кірхгофа.

3. Розглянемо випадок, коли термочутливу пластину нагрівають тепловим потоком, поверхнева густина якого дорівнює $q_0 = const$, зосередженим у прямокутнику площею $V = 4h\delta$ на межовій поверхні $K_1 = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$. На іншій межовій поверхні пластини $K_2 = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ задано крайові умови другого роду (рис. 3).

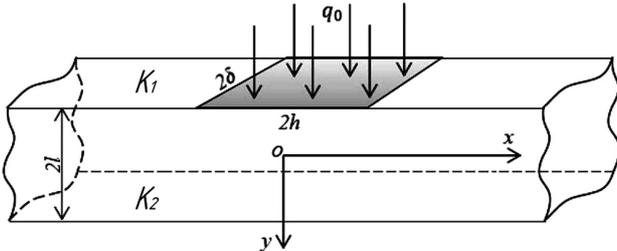


Рис. 3. Ізотропна пластина під впливом теплового потоку

Для визначення розподілу температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y скористаємось рівнянням теплопровідності [8], [12]

$$\operatorname{div}(\lambda(t) \operatorname{grad} t(x, y)) = 0 \quad (15)$$

за крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \lambda(t) \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=-l} = -q_0 S_-(h - |x|), \quad \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (16)$$

Застосуємо до рівняння (15) та крайових умов (16) перетворення Кірхгофа (3), внаслідок чого отримаємо рівняння

$$\Delta \vartheta = 0 \quad (17)$$

та крайові умови

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(h - |x|), \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (18)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (17) та крайових умов (18), отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = 0 \quad (19)$$

за крайовими умовами

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=-l} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi} \sin \xi h, \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=l} = 0. \quad (20)$$

Загальний розв'язок рівняння (19) знайдемо у вигляді

$$\bar{\vartheta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y}. \quad (21)$$

Використавши крайові умови (20) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задачі (19), (20)

$$\bar{\vartheta}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi^2} \sin \xi h \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l}. \quad (22)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (22), одержимо співвідношення (23)

$$\vartheta(x, y) = \frac{2q_0}{\lambda \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^2} \sin \xi h \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l} d\xi, \quad (23)$$

яким цілком визначено змінну Кірхгофа.

4. Розглянемо випадок, коли геометричні параметри прямокутника h, δ , в якому зосереджено тепловий по-

тік, є малими, порівняно зі шириною пластини $2l$. З огляду на це, рівняння (15) не зміниться, а крайові умови (16) запишемо у вигляді

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \lambda(t) \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=-l} = -q_0 \delta(x), \quad \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (24)$$

Застосуємо до умов (24) перетворення Кірхгофа, внаслідок чого отримаємо

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda^0} \delta(x), \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (25)$$

Використавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до співвідношень (25), одержимо крайові умови

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi}} \xi, \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=l} = 0.$$

Розв'язок рівняння (19) з урахуванням цієї умови визначимо у вигляді

$$\bar{\vartheta}(y) = \frac{q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi} \xi} \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l}. \quad (26)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (26), отримаємо розв'язок задачі (15), (25)

$$\vartheta(x, y) = \frac{q_0}{\lambda \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x ch \xi (y-l)}{\xi^2 sh 2 \xi l} d\xi, \quad (27)$$

яким визначено змінну Кірхгофа.

Частковий приклад залежності коефіцієнта теплопровідності від температури. Для розв'язування багатьох практичних задач використовують лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [8], [12]

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (28)$$

де k – температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалу пластини. Із виразів (3), (28) отримуємо співвідношення для визначення температури $t(x, y)$ у пластині

$$t(x, y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2 \frac{k}{\lambda^0} \vartheta(x, y)}}{k}, \quad (29)$$

яким цілком описали температурне поле в термочутливій пластині з локальним нагріванням для наведених вище випадків.

За формулою (29) (математична модель 3) обчислили та виконали числовий аналіз розподілу температури $t(x, y)$ у пластині для таких вихідних даних: матеріали пластини – кремній та германій; $l=h=0,01$ м.

Для наведених конструкційних матеріалів пластини в інтервалі температур $[0^\circ \text{C}; 1127^\circ \text{C}]$ спостерігаємо такі залежності коефіцієнта теплопровідності від температури [7]:

- для кремнію $\lambda(t) = 67,9 \frac{\text{W}}{\text{Km}} (1 - 0,0005 \frac{1}{\text{K}} t)$;
- для германію $\lambda(t) = 60,3 \frac{\text{W}}{\text{Km}} (1 - 0,0008 \frac{1}{\text{K}} t)$,

що є частковими випадками співвідношення (28). Числові обчислення виконано з точністю $\varepsilon=10^{-6}$.

Обговорення результатів дослідження. Проілюстровано (рис. 4,а) зміну температури $t(x, y)$ залежно від просторової координати y та заданих значень координати x , коли матеріалом пластини вибрано кремній. Із поведінки кривих видно, що температура, як функція ко-

ординати y , монотонно спадає і досягає максимальне значення на межовій поверхні пластини K_1 , на якій зосереджено тепловий потік.

На рис. 4, б зображено зміну температури $t(x, y)$ залежно від просторової координати x та заданих значень просторової координати y . Матеріалом пластини вибрано кремній. Із поведінки кривих видно, що температура, як функція координати x , є достатньо гладкою та монотонною функцією і досягає максимальне значення у точці $(0; 0,005)$. У разі збільшення за абсолютною ве-

личиною значень просторової координати x температура знижується, що свідчить про адекватність математичної моделі реальному фізичному процесу.

На рис. 5, а зображено зміну температури $t(x, y)$ залежно від просторової координати y для заданих значень координати $x = 0$ та поверхневої густини теплового потоку q_0 . Із поведінки кривих видно, що збільшення інтенсивності нагрівання значно впливає на значення температури в пластині (матеріал пластини – кремній).

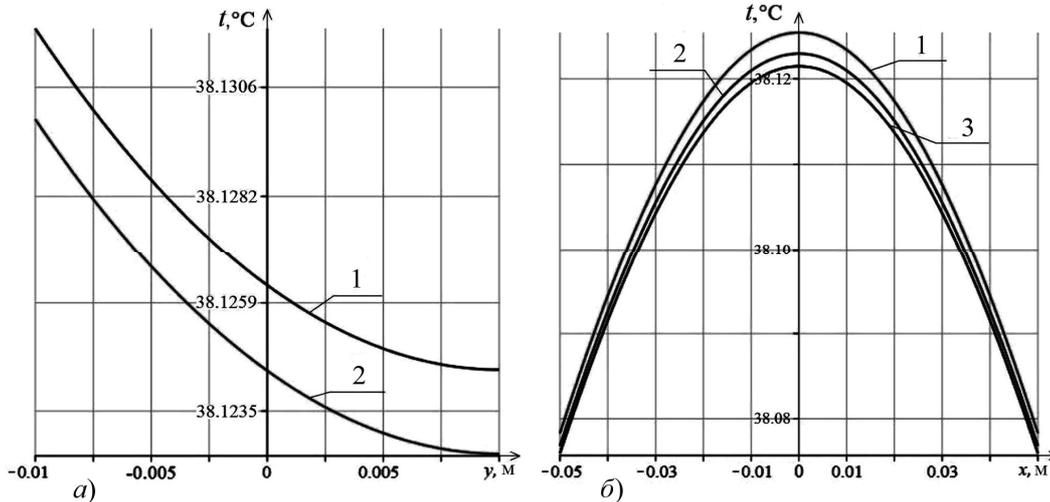


Рис. 4. Залежність температури $t(x, y)$ від: а) координати y для $q_0 = 200$ Вт/м² та заданих значень координати x : крива 1 – $x = 0$; крива 2 – $x = 0,01$; б) координати x для $q_0 = 200$ Вт/м² та заданих значень координати y : крива 1 – $y = -0,005$; крива 2 – $y = 0$; крива 3 – $y = 0,005$

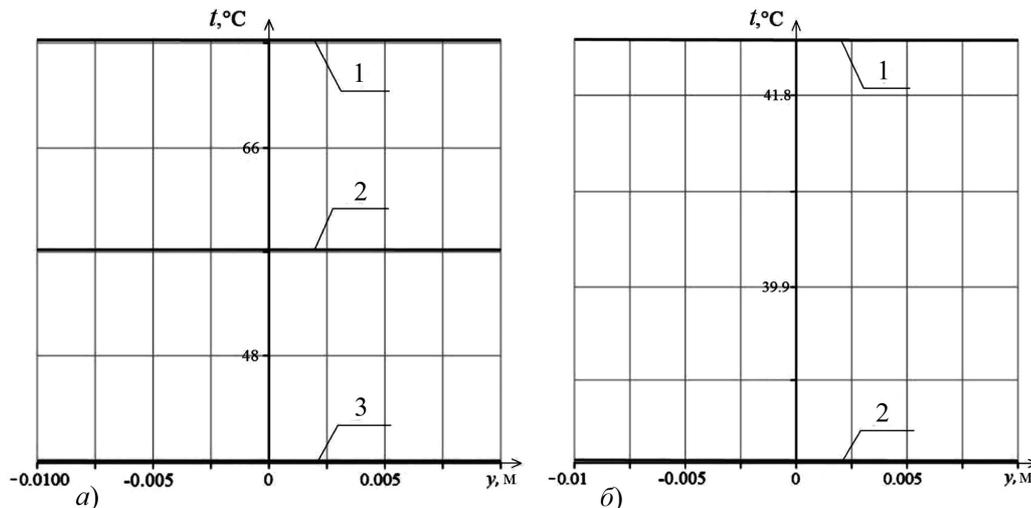


Рис. 5. Залежність температури $t(x, y)$ від координати y для заданих значень координати $x = 0$ та поверхневої густини теплового потоку: а) крива 1 – $q_0 = 400$ Вт/м²; крива 2 – $q_0 = 300$ Вт/м²; крива 3 – $q_0 = 200$ Вт/м²; б) $q_0 = 200$ Вт/м² та матеріалів пластини: крива 1 – германій; крива 2 – кремній

На рис. 5, б зображено зміну температури $t(x, y)$ залежно від просторової координати y для заданих значень координати $x = 0$ поверхневої густини теплового потоку $q_0 = 200$ Вт/м² для різних матеріалів пластини. Із поведінки кривих видно, що коефіцієнт теплопровідності є важливим параметром, який впливає на температурне поле. Збільшення його значення приводить до зменшення значень температури в середовищі.

Висновок

За допомогою перетворення Кірхгофа лінеаризовано вихідні нелінійні рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови. Із використанням узагальнених функцій, які дали змогу описати зони локального нагрів-

вання термочутливої пластини, та інтегрального перетворення Фур'є за просторовою координатою визначено аналітичні розв'язки крайових задач теплопровідності, диференціальні рівняння та крайові умови яких містять праву частину у вигляді розривної та сингулярної функцій. Ці розв'язки подано у вигляді невластних збіжних інтегралів. Розроблено алгоритм і програмні засоби для визначення температурного поля в довільній точці термочутливої пластини з локальним нагріванням. На цій основі отримано числові значення температурного поля, із використанням яких геометрично відображено розподіл температури залежно від просторових координат, інтенсивності нагрівання і теплофізичних параметрів. Наведені математичні моделі дають змогу аналізу-

вати температурні режими у термочутливих середовищах, які піддаються локально зосередженим тепловим навантаженням щодо їх термостійкості внаслідок інтенсивного нагрівання, а також захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

References

- [1] Azarenkov, V. I. (2012). Issledovanie i razrabotka teplovoi modeli i metodov analiza temperaturnikh polei konstruktsii radioelektronnoi apparatury. *Technology audit and production reserves*, 3/1(5), 39–40. [In Russian].
- [2] Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *Journal of Engineering Mathematics*, 61(2-4), 371–384. <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>
- [3] Dovbnia, K. M., & Dundar, O. D. (2016). Statsionarnyi teplobmin tonkykh polohykh izotropnykh obolonok, yaki znakhodiatsia pid diieiu dzherel tepla, zoseredzhenykh po dvovymirni oblasti. *Visnyk DonNU. Ser. A: Pryrodnychi nauky*, 1-2, 107–112. [In Ukrainian].
- [4] Havrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modelling of temperature regimes in piecewise-homogeneous structures*. Lviv: Publishing house of Lviv Politechnic National University, 176 p.
- [5] Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio electronics, computer science, management*, 3(46), 7–15. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>
- [6] Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanska, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk NHU*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>
- [7] Kikoina, I. K. (1976). *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik*. Moscow: Atomizdat, 1008 p. [In Russian].
- [8] Koliano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka, 280 p.
- [9] Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 720 p. [In Russian].
- [10] Noda, N. (1991). Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397. <https://doi.org/10.1115/1.3119511>
- [11] Otao, Y., Tanigawa, O., & Ishimaru, O. (2000). Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *Journal of Thermal Stresses*, 23, 257–271. <https://doi.org/10.1080/014957300280434>
- [12] Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Nauka, 368 p. [In Russian].
- [13] Tanigawa, Y., & Otao, Y. (2002). Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation. *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu*, 2, 133–134. https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0_133
- [14] Tanigawa, Y., Akai, T., & Kawamura, R. (1996). Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Stresses*, 19(1), 77–102. <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>
- [15] Yangian, Xu, & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO₂/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. *2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng.*, 2, 433–436. <https://doi.org/10.1109/ICICTA.2009.842>

V. I. Havrysh, R. R. Shkrab

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

TEMPERATURE MODES IN A HEAT-SENSITIVE PLATE WITH LOCAL HEATING

Nonlinear mathematical models for the analysis of temperature regimes in a thermosensitive isotropic plate heated by locally concentrated heat sources have been developed. For this purpose, the heat-active zones of the plate are described using the theory of generalized functions. Given this, the equation of thermal conductivity and boundary conditions contain discontinuous and singular right parts. The original nonlinear equations of thermal conductivity and nonlinear boundary conditions are linearized by Kirchhoff transformation. To solve the obtained boundary value problems, the integral Fourier transform was used and, as a result, their analytical solutions in the images were determined. The inverse integral Fourier transform was applied to these solutions, which made it possible to obtain analytical expressions for determining the Kirchhoff variable. As an example, the linear dependence of the thermal conductivity on temperature is chosen, which is often used in many practical problems. As a result, analytical relations were obtained to determine the temperature in the heat-sensitive plate. The given analytical solutions are presented in the form of improper convergent integrals. According to Newton's method (three-eighths), numerical values of these integrals are obtained with a certain accuracy for given values of plate thickness, spatial coordinates, specific power of heat sources, the thermal conductivity of structural materials of the plate, and geometric parameters of the heat-active zone. The material of the plate is silicon and germanium. To determine the numerical values of temperature in the structure, as well as the analysis of heat transfer processes in the middle of the plate due to local heating, developed software, using which geometric mapping of temperature distribution depending on spatial coordinates, thermal conductivity, specific heat flux density. The obtained numerical values of temperature testify to the correspondence of the developed mathematical models of the analysis of heat exchange processes in the thermosensitive plate with local heating to the real physical process. The software also makes it possible to analyze such environments that are exposed to local heat loads in terms of their heat resistance. As a result, it becomes possible to increase it and to protect it from overheating, which can cause the destruction not only of individual elements but also of the entire structure.

Keywords: temperature field; isotropic thermosensitive plate; thermal conductivity; heat-insulated surface; perfect thermal contact; local heating.

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. Email: gavryshvasyl@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Шкраб Роман Романович, асистент, кафедра програмного забезпечення. Email: ikni.pz@gmail.com

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Шкраб Р. Р. Температурні режими в термочутливих елементах цифрових пристроїв, спричинені локальним нагріванням. *Український журнал інформаційних технологій*. 2021, т. 3, № 2. С. 21–26.

Citation APA: Havrysh, V. I., & Shkrab, R. R. (2021). Temperature modes in a heat-sensitive plate with local heating. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 3(2), 21–26. <https://doi.org/10.23939/ujit2021.02.021>