ISSN 2707-1898 (print)
Український журнал інформаційних технологій
Ukrainian Journal of Information Technology
http://science.lpnu.ua/uk/ujit
https://doi.org/10.23939/ujit2023.01.025
Article received 20.04.2023 р.
Article accepted 02.05.2023 р.
UDK 004.(4+51+67):519.6

Correspondence author
Yu. I. Hrytsiuk
yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua

Ю. І. Грицюк, Р. Б. Тушницький

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТАБЛИЧНО-ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ У ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНИХ ВУЗЛАХ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Розроблено методику чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня, яка дає можливість обчислювати похідні k-го порядку ($k \le n$) у будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції від однієї, двох і багатьох незалежних змінних. Проаналізовано останні дослідження та публікації, що дало змогу встановити складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями незалежних змінних на деякому інтервалі значень таблично-заданої функції. Наведено постановку задачі чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня від однієї, двох і багатьох незалежних змінних. Встановлено, що будь-яку таблично-задану функцію спочатку потрібно згладити деякою функцією, аналітичний вираз якої є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом, який отримано за МНК із деякою похибкою. Під похідною від такої таблично-заданої функції розуміють похідну від її інтерполянти. Розроблено метод чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, сутність якого зводиться до добутку вектора-рядка Тейлора n-го степеня на матрицю k-го порядку його диференціювання ($k \le n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів відповідної інтерполянти.

Наведено деякі постановки задач чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня, відповідні алгоритми їх розв'язання та конкретні приклади реалізації. Встановлено, що для обчислення похідної k-го порядку від таблично-заданої функції за прийнятим значенням незалежної змінної потрібно виконати такі дії: за даними таблиці сформувати матричне рівняння, розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти; підставити у відповідний матричний вираз коефіцієнти інтерполянти та значення незалежної змінної та виконати дії множення матриць, вказані у виразі. Здійснено перевірку правильності виконання розрахунків із використанням відповідних центральних різницевих формул. Встановлено, що обчислені похідні k-го порядку з використанням формул центральних скінченних різниць практично збігаються зі значеннями, отриманими за допомогою інтерполяційного многочлена Тейлора n-го степеня, тобто значення похідних обчислено правильно.

Ключові слова: зашумлені дані, згладжування функцій, інтерполяція табличних фунакції, формули центральних скінченних різниць, обчислення похідних.

Вступ / Introduction

Під час розв'язання багатьох математичних задач із інженерії ПЗ часто виникає потреба отримання значень похідних різних порядків від функції $f[x]$, заданої у вигляді таблиці [21]. Зазвичай, тут неможливо, або занадто складно застосувати безпосередньо методи диференційного числення [4]. Замість них використовують наближені методи чисельного диференціювання таблично-заданих функцій [29]. В чисельних методах чисельне диференціювання описує алгоритми для оцінювання похідної математичної функції, використовуючи для цього значення таблично-заданої функції та інші знання про дану функцію [7].

Задача чисельного диференціювання полягає в знаходженні значень похідних від функції $y = f[x]$ в заданих точках у випадках, коли аналітичний вигляд функції $\varphi(x)$ невідомий (задана неявно), надто складний, або функція $f[x]$ задана таблицею. Привабливість чисельного підходу в наявності простих, так званих різницевих., формул [38], за допомогою яких похідні в заданих точках таблично-заданої функції можна обчислити приблизно за декількома значеннями функції $f[x]$ у цих і близьких до них точках.

Існує багато різних методів чисельного диференціювання таблично-заданих функцій (англ. *Numerical Differentiation of Periodic Tabular Functions*). Вибір найпридатнішого алгоритму залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його реалізацію, наскільки гладкою є крива інтерполянти, яку кількість наборів даних (значень аргументів і відповідних значень функції) вона вимагає і т. д.

Найбільш зручним інтерполяційним многочленом для чисельного диференціювання таблично-заданих функцій є поліном Ньютона [1]. За допомогою нього було отримано різницеві формули різного порядку точності, залежно від кількості задіяних точок $x_j \in X$ [37]. Однак, якщо функція має періодичний характер, то тут доцільно використовувати інший клас інтерполяційних функцій, наприклад степеневий многочлен Тейлора n-го степеня від однієї та багатьох незалежних змінних [21], який, на нашу думку, має значно більше переваг, порівняно з поліном Ньютона.

Об'єкт дослідження – чисельне диференціювання таблично-заданих функцій у довільно розташованих вузлах інтерполяції.

Предмет дослідження – алгоритми і методи чисельного диференціювання таблично-заданих функцій із використанням многочлена Тейлора n-го степеня для однієї, дво- та багаьох незалежних змінних, що дасть можливість обчислювати похідні заданого порядку в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції.

Мета роботи – розробити методику чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня від однієї, двох і багатьох незалежних змінних, що дасть можливість обчислювати звичайні, часткові та мішані похідні k-го порядку, з огляду на високу точність отриманого результату, необхідну стійкість та збіжність використаного методу, а також належну ефективність використання комп'ютерних ресурсів.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні *завдання дослідження*:

- проаналізувати останні дослідження та публікації, що дасть змогу встановити основну складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями незалежних змінних(ів) на деякому інтервалі значень таблично-заданої функції;
- навести постановку задачі чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня від однієї та багатьох незалежних змінних;
- з'ясувати особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня в довільно розташованих вузлах інтерполяції;
- навести деякі постановки задач чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора n-го степеня та алгоритм їх розв'язання, а також конкретні приклади їх реалізації;
- здійснити перевірку правильності виконання розрахунків із використанням відповідних центральних різницевих формул.

Отже, в цьому дослідженні розглянемо деякі особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій від однієї та двох незалежних змінних у довільно розташованих вузлах інтерполяції многочленом Тейлора n-го степеня від однієї та багатьох незалежних змінних, а саме:

- наведемо задачі з інженерії ПЗ, пов'язані з потребою чисельного диференціювання таблично-заданих функцій;
- розглянемо особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій від однієї, двох і багатьох незалежних змінних у довільно розташованих вузлах інтерполяції.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Чисельне диференціювання – завдання обчислення похідних від функції за заданими значеннями незалежних змінних на деякому інтервалі значень таблично-заданої функції. Така потреба виникає внаслідок проведення різних наукових досліджень і практичних застосувань, наприклад: ідентифікації точок розриву в процесі оброблення зображення [50]; процедури розв'язування інтегрального рівняння Абеля [52]; визначення піків у хімічній спектроскопії [44]; деякі обернені задачі в рівняннях математичної фізики [27] тощо. Основна складність такого диференціювання полягає в некоректності самої задачі, де малі похибки у вимірюваннях значень функції можуть призвести до значних помилок під час обчислення похідних [17].

За останні декілька десятиліть було розроблено та удосконалено багато сучасних підходів до чисельного диференціювання табличних функцій різними дослідниками з різних країн [16]. Вони не тільки вдосконалювали відомі методи, а й знаходили нові шляхи для підвищення точності процедури чисельного диференціювання табличних функцій. Проаналізуємо деякі з них дещо детальніше.

У роботі [31] розроблено методологію чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку, яка дає можливість обчислювати похідні k-го порядку ($k \le n$) в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції. Проаналізовано останні дослідження та публікації, що дало змогу встановити складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями незалежних змінних на деякому інтервалі значень табличної функції. Наведено постановку задачі чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку. Встановлено, що будь-яку таблично-задану функцію спочатку згладжують деякою функцією, котра є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом [30], який отримано за МНК (англ. O*rdinary Least Squares*, OLS) із деякою похибкою. Під похідною від такої табличної функції розуміють похідну від її інтерполянти [22]. Розроблено метод чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій, сутність якого зводиться до добутку вектора-рядка Фур'є n-го порядку на матрицю k-го порядку його диференціювання ($k \le n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів відповідної інтерполянти.

У роботі [13] автори вважають, що диференціювання функцій (обчислення похідних) є одним із найважливіших понять у численні, яке використовують майже скрізь у багатьох галузях математики, зокрема й прикладної. Цілком природно, що чисельне диференціювання табличних функцій має бути важливою технікою виконання інженерних розрахунків. Однак, оскільки чисельне диференціювання табличних функцій є некоректним у розумінні Адамара, згідно з яким будь-яка невелика помилка у вимірюваннях значень буде збільшена під час обчислення похідних, то інженерам надто важко використовувати цю техніку виконання обчислень. У своїй роботі автори запропонували новий простий чисельний метод для реконструкції початкової функції з розсіяних вхідних даних і обчислення її похідних, внаслідок чого показують, що їхній метод є ефективним і його можна легко реалізувати.

Оскільки чисельне диференціювання табличних функцій є не зовсім коректною проблемою, то для її вирішення потрібні відповідні методи регуляризації, тобто внесення деякої додаткової інформації, щоб знайти рішення некоректно поставленої задачі. Використовувані багатьма дослідниками методи регуляризації базуються на (зовнішніх) параметрах, наприклад регуляризації Тихонова, однак вона має певні обчислювальні труднощі. Водночас, ітераційні методи регуляризації слугують привабливою їх альтернативою. Наприклад, у роботі [1] автори пропонують використати мінімізуючий функціонал, який містить не зашумлені дані безпосередньо, а згладжену або інтегровану їх версію. Перевага цього методу в тому, що, окрім прямого використання зашумлених даних, створюють певну послідовність функцій для їх згладжування, яка не вимагає перетворення, тому не істотно впливає на точність чисельного диференціювання.

Під зашумленими (приблизно лінійними) даними розуміють такі, до яких підібрано лінійну чи поліноміальну функцію. Хоча поліноміальну функцію можна допасувати й ідеально, проте від лінійної функції практично завжди можна очікувати кращого узагальнення. Іншими словами, якби ці дві функції застосовувати для екстраполювання даних за межами тих, до яких здійснювався підбір, то лінійна функція давала б кращі передбачення.

У роботі [50] наведено новий підхід до побудови скінченно-різницевих методів, придатних для стабільного чисельного диференціювання табличних функцій. Показано, як багатоточкові так звані диференціатори з кроком h як параметром регуляризації можуть генерувати похідні з заданою точністю, а наведені константи оцінок можна обчислити явно. Також розроблено ітераційну регуляризуючу схему розв'язування задачі чисельного диференціювання функції у формі інтегрального рівняння Вольтерри [2].

У роботі [53] запропоновано метод стійкого чисельного диференціювання табличних функцій на підставі зашумлених даних, який попередньо вимагає аналітичного розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри другого роду. Наведено деякі результати його застосування, в яких їхній початковий розв'язок було обчислено аналітично. Розглянуті приклади показують, що запропонований метод стійкого чисельного диференціювання більш ефективний, ніж деякі інші методи, наприклад варіаційна регуляризація.

Робота [67] стосується класу багатокрокових чисельних різницевих методів для розв'язання одновимірних параболічних обернених задач математичної фізики із параметром керування джерелом тепла $p(t)$. В цій роботі автори застосували лінійний багатокроковий метод у поєднанні з інтерполяцією Лагранжа для реалізації трьох різних різницевих схем [5]. Оскільки проблема чисельного диференціювання табличних функцій з зашумленими та розсіяними даними є дещо некоректною, то розроблена автором сплайн-модель їх згладжування на підставі методу регуляризації Тихонова придатна для обчислення похідної, забрудненої шумовою помилкою. Також у роботі запропоновано оцінки похибок усікання та зроблено висновки щодо збіжності запропонованих різницевих методів. Наведено результати багатьох тестів для даних із різними рівнями їх зашумлення, які показали, що запропоновані алгоритми достатньо точні та надзвичайно ефективні.

У роботі [64] авторами проаналізовано некоректність обчислення похідної від інтерпольованої функції та показано регуляризовану часткову похідну для сигналів із обмеженою смугою частот у двовимірному просторі. Також автори дослідили збіжність регуляризованої часткової похідної від інтерпольованої функції та порівняли її за допомогою теореми Шеннона про вибірку.

У роботі [70] автори розглядають особливості чисельного диференціювання табличних функцій, заданих зашумленими даними. Наведено та обговорено новий підхід, який базується на інтегральному рівнянні першого роду з відповідним компактним оператором. Оскільки сингулярну систему компактного оператора можна отримати легко, то усічений сингулярний розклад TSVD (англ. *Truncated Singular Value Decomposition*) вибрано як необхідну техніку регуляризації. Тут автори показують, що метод вимагає дискретного синусного перетворення, тому його можна легко та швидко чисельно реалізувати. Також наведено значну кількість прикладів, що демонструють ефективність запропонованого методу.

У роботі [71] авторами отримано теоретичний результат для чисельного диференціювання табличних функцій від H^n [0, 1]. Але в цьому методі для різних n використовують різні підходи до вирішення проблеми. У роботі [69] автори наводять метод чисельного диференціювання періодичних функцій. У запропонованому методі обчислювальні процеси стали рівномірними для різних n, що означає, що метод є самоадаптивним.

У роботі [9] автори вважають, що ефективним засобом апроксимації аналітичної неперіодичної функції на обмеженому інтервалі є використання ряду Фур'є у більшій області визначення. При належній побудові це так зване розширення Фур'є геометрично швидко сходиться за параметром усікання. Шкода, але процедура обчислення розширення Фур'є вимагає розв'язання погано обумовленої лінійної системи, тому можна очікувати, що така швидка збіжність буде втрачена при виконанні обчислень із заданою точністю. Їхньою метою було показати, що це не так, що розширення Фур'є фактично чисельно стабільне, коли реалізовані в скінченній арифметиці, і досягають швидкої збіжності, яка є принаймні супералгебричною. У цьому випадку погана обумовленість лінійної системи не перешкоджає адекватній апроксимації навіть зашумлених вхідних даних.

У другій частині роботи [9] автори розглядають питання обчислення розширень Фур'є з рівнопросторних даних. Отримані результати [51] стверджують, що жоден метод вирішення цієї проблеми не може бути одночасно чисельно стабільним і експоненціально збіжним. Автори пояснюють, як розширення Фур'є пов'язане з цим теоретичним бар'єром і демонструють, що вони особливо добре підходять для вирішення цієї проблеми, тобто, вони досягають принаймні супералгебричної збіжності чисельно стабільним способом.

У роботі [35] автори вважають, що діапазон методів Фур'є може бути значно збільшений шляхом розширення неперіодичної функції $f(x)$ до періодичної $\phi(x)$ на більшому інтервалі. Коли функція $f(x)$ аналітично відома на розширеному інтервалі, то розширення є прямим. Якщо ж функція $f(x)$ невідома за межами фізичного інтервалу, то для роботи з нею немає стандартного рецепту. Набагато гірше, коли, наприклад, безрадарний літальний апарат, який пробирається крізь туман, так і алгоритм може зазнати краху для проблеми "гори в тумані". Йдеться про те, що функція $f(x)$, яка цілком добре поводиться на фізичному інтервалі, повністю може мати різні сингулярності в розширеній області визначення. У своїй роботі автори порівнюють роботу декількох алгоритмів для успішного розширення функції $f(x)$ у "тумані", навіть якщо аналітичне розширення є сингулярним. Найкраще розширення третього роду вимагає розкладання сингулярного значення з ітеративним уточненням, де досягає точності, близької до машинної.

Отже, проведений аналіз останніх досліджень та публікацій у сфері чисельного диференціювання табличних функцій (обчислення похідних) показав, що багатьма дослідниками розроблено потужний математичний апарат, який можна використовувати для розв'язання широкого кола задач як наукового, так і прикладного значення. Але основна маса досліджень – це строга теорія чисельного диференціювання табличних функцій, тобто уточнення її фундаментальних математичних положень. Проте, якщо до обчислення похідних немає застережень, то використання чисельного диференціювання табличних функцій не позбавлене своїх недоліків, пов'язаних із деякими відхиленнями через нагромадження похибок обчислення за великої кількості зашумлених даних.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

Відомо [3], задача чисельного диференціювання полягає у знаходженні значень похідних від функції $y = f[x]$ в заданих точках у випадках, коли аналітичний вигляд функції $\varphi(x)$ невідомий (задано неявно), надто складний або функцію задано таблицею. Привабливість чисельного підходу в наявності простих формул, за допомогою яких похідні в заданих точках функції $\varphi(x)$ можна обчислити приблизно за декількома її значеннями в цих і близьких до них точках.

Згідно з визначенням [5], *похідна* – основне поняття диференціального числення, що характеризує швидкість зміни значення функції. Її визначають як границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (якщо така границя існує). Функцію, що має скінченну похідну, називають диференційовною. Процес знаходження похідної функції називають диференціюванням. Зворотним до диференціювання є інтегрування – процес знаходження первісної. Водночас, *диференціювання* [3], – це метод обчислення співвідношення приросту залежної змінної y за відношенням до приросту незалежної змінної x. Це співвідношення приростів називають похідною функції y за змінною x. Якщо йдеться про більшу точність визначення, то залежність y від x означає, що y є функцією від x. Таку функціональну залежність часто позначають як $y = \varphi(x)$, де $\varphi(\cdot)$ – функція. Якщо x та y дійсні числа, і якщо графік функції y зображено відносно x, то похідна у деякій її точці становить тангенсу кута нахилу дотичної до цього графіка в цій точці.

Найбільш зручним інтерполяційним многочленом для чисельного диференціювання є поліном Ньютона [3]. За допомогою нього отримано формули різного порядку точності, залежно від кількості задіяних точок x_j [15]. Однак у викладеному нижче матеріалі будемо використовувати степеневий многочлен Тейлора, який, на нашу думку, має значно більше переваг, порівняно з поліном Ньютона.

Варто зазначити, що запис формул через функцію $f[x]$ відповідає постановці задачі чисельного диференціювання, коли її аналітичний вигляд невідомий або надто складний. Це означає, що значення функції $f[x]$ можна розрахувати в потрібних точках x_j із кроком h. При цьому h називають кроком чисельного диференціювання та підбирають, залежно від поведінки функції $f[x]$ в околі точки x_0.

Запис формул через v_j відповідає постановці задачі чисельного диференціювання, коли функцію $f[x]$ задано таблицею. При цьому для крайніх точок x_j можна застосовувати різницеві формули чисельного диференціювання вперед та назад (відповідно до того, з якого вони боку), а для внутрішніх точок краще застосовувати симетричні різницеві формули чисельного диференціювання [23]. В цій роботі буде застосовано традиційний підхід до чисельного диференціювання періодичних таблично-заданої функції з використанням інтерполяційного многочлена Тейлора n-го степеня, а також різницеві формули чисельного диференціювання.

1. Задачі інженерії ПЗ, пов'язані з потребою чисельного диференціювання таблично-заданих функцій. Під час вирішення проблем інженерії ПЗ існує багато прикладних задач, у математичному формулюванні яких виникає потреба обчислення похідних 1-го та вищих порядків від функцій, заданих таблицею. Найважливіша з них полягає у знаходженні екстремуму цільової функції за однією чи багатьма змінними. Переважно таку функцію у процесі оптимізаційного розрахунку подають у табличному вигляді, а незалежні змінні, що відповідають її екстремуму, визначають з системи рівнянь, яку отримують шляхом прирівнювання до нуля частинних похідних цільової функції за кожною незалежною змінною.

Надто часто потреба обчислення похідних від інтерполянт, заданих многочленом Тейлора, є проміжним етапом у процесі розв'язання деякої інженерної задачі. Так, нелінійна модель стану об'єкта (яку, як відомо [12] можна описати системою нелінійних алгебричних рівнянь та алгоритмом її розв'язання) може мати одну або декілька функцій, які задано в табличному вигляді. Наприклад, якщо компонентою об'єкта є ПЗ із характеристикою $G = \varphi(t)$ (t – заданий період часу з ймовірністю безвідмовної роботи; G – здатність програмного продукту безвідмовно виконувати певні функції), заданою у вигляді таблиці, то рівняння $dG/dt = d\varphi(t)/dt = 0$ буде одним з рівнянь нелінійної системи стану цього об'єкта і застосування методу Ньютона для її розв'язання вимагатиме обчислення похідної $d\varphi(t)/dt$. Нагадаємо, що здатність ПЗ безперебійно виконувати певні функції при заданих умовах протягом деякого періоду часу зі значною ймовірністю безвідмовної роботи називають його *надійністю*. Рівень надійності ПЗ характеризує ймовірність його роботи без відмови протягом деякого періоду часу.

Зазвичай, постановка задачі чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з багатьма незалежними змінними має два варіанти формулювання.

Задача 1. Для таблично-заданої функції $V = V[\bar{X}]$ від декількох незалежних змінних $\bar{X} = [x_i, i = \overline{1, M}]$ потрібно у довільній точці простору цих змінних, заданій значеннями $\bar{X} = \bar{X}' \Rightarrow [x_i = x_i', i = \overline{1, M}]$, обчислити частинні похідні 1-го порядку $\dfrac{\partial V}{\partial \bar{X}} = \left\{ \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, i = \overline{1, M} \right\}$ і (або) частинні та мішані похідні вищих порядків.

Загалом, функцію $V = V[\bar{X}]$, задану попередньо у вигляді табл. 1, спочатку згладжують якоюсь функцією $F(\bar{X})$, котра є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом, який отримано за МНК із деякою похибкою $R_n(\bar{X})$ [25]. Під похідною від такої таблично-заданої функції потрібно розуміти похідну від її інтерполянти [13]. Тут варто відзначити некоректність процедури чисельного диференціювання таблично-заданих функцій в тому сенсі, що близькість невідомої функції $\Phi(\bar{X})$ та загладжуваної функції $F(\bar{X})$ не гарантує близькості їх похідних [21]. Понад це, вони можуть мати у одній і тій же точці $\bar{X}'$ похідні різних знаків [22]. Тому чисельне диференціювання періодичних таблично-заданих функцій необхідно застосовувати обережно і, як правило, для похідних невеликих порядків. Тим не менше такий підхід широко використовують на практиці, зокрема й під час вирішення проблем інженерії ПЗ.

Табл. 1. Загальний вигляд таблично-заданої функції від багатьох незалежних змінних / General view of the table-specified function from many independent variables

№ вузла / Змінна	1	2	…	p	…	P
x_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,p}$	…	$x_{1,P}$
x_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,p}$	…	$x_{2,P}$
…	…	…	…	…	…	…
x_M	$x_{M,1}$	$x_{M,2}$	…	$x_{M,p}$	…	$x_{M,P}$
V	v_1	v_2	…	v_p	…	v_P

Примітка: P – кількість вузлів інтерполяції; $\bar{\bar{X}} = [\bar{X}_p = [x_{i,p}, i = \overline{1,M}];\ p = \overline{1,P}]$, $\bar{V} = [v_p, p = \overline{1,P}]$ – відомі числа.

Задача 2. Функція $V = V[\bar{X}]$ від декількох незалежних змінних $\bar{X} = [x_i, i = \overline{1,M}]$ задана у вигляді табл. 1. Потрібно обчислити частинні похідні 1-го порядку $\frac{\partial V}{\partial \bar{X}} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_i}, i = \overline{1,M} \right\}$ і (або) частинні та мішані похідні вищих порядків для будь-якої з вузлових точок, значення яких задано в таблиці (а не за довільних значень незалежних змінних $\bar{X} = [x_i, i = \overline{1,M}]$, як у задачі 1).

Очевидно, що постановка задачі 2 є окремим випадком задачі 1, однак її розглядають як окрему задачу, оскільки в ній обчислення похідних зводиться до застосування дещо простіших формул. Їх називають *формулами чисельного диференціювання*, а процедуру обчислення похідних за цими формулами – *чисельним диференціюванням таблично-заданих функцій*. Найпростіші формули отримують шляхом розкладення функції $\Phi(\bar{X})$ у ряд Тейлора, кількість членів якого у точці $\bar{X}'$ мають мати достатню кількість похідних. В цьому випадку похідні отримують внаслідок диференціювання інтерполяційних многочленів, які можна застосовувати для розв'язання обох задач.

Однак у практичних розрахунках чисельне диференціювання виявляється надзвичайно чутливим до помилок у початкових даних, до степеня многочлена і до відкидання членів його ряду, а також до інших подібних маніпуляцій [5]. Окрім цього, висока точність процедури інтерполяції таблично-заданої функції зовсім не гарантує навіть допустимої точності інтерполянти між вузловими точками і, як наслідок, для прийнятної точності обчислення похідних навіть малих порядків. Тому чисельне диференціювання таблично-заданих функцій необхідно застосовувати обережно і, як правило, для похідних невеликих порядків.

Тут варто пояснити деякі особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій у довільно розташованих і рівновіддалених вузлах інтерполяції. Якщо таблична функція задана з довільно розташованими вузловими точками, то для обчислення похідної k-го порядку доведеться спочатку розрахувати коефіцієнти інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня $(1 \le k \le n)$. Тепер, маючи інтерполянту з числовими коефіцієнтами, можна різними способами обчислювати від неї похідні k-го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції. Однак, наприклад, у методі скінченних елементів [47], часто вузли інтерполяції задають рівновіддаленими вузловими точками з кроком h, які різняться між собою тільки значеннями вузлів інтерполяції. Тому тут необхідно обчислювати похідні k-го порядку тільки у цих рівновіддалених вузлах інтерполяції. Для цього використовують так званий метод різницевих аналогів диференціальних операторів k-го порядку [23], згідно з яким достатньо одноразово обчислити його значення для певного розташування вузлових точок, а потім за допомогою цього різницевого аналога можна успішно обчислювати похідні k-го порядку. Особливості ж чисельного диференціювання таблично-заданих функцій у рівновіддалених вузлах інтерполяції, а також метод різницевих аналогів диференціальних операторів, тобто послідовність дій під час розв'язування задачі 2, розглянемо в наступних публікаціях.

2. Чисельне диференціювання таблично-заданих функцій у довільно розташованих вузлах інтерполяції. Розглянемо послідовність дій під час розв'язування задачі 1 спочатку стосовно таблично-заданої функції від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора, а потім для двох і багатьох незалежних змінних.

2.1. Чисельне диференціювання таблично-заданих функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора n-го степеня. Загалом, функцію $V = V^n[x]$, яку задано табл. 2, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$V^n[x] = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^n}{n!} = \bar{T}^n[x] \times \bar{C}^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

де $\bar{T}^n[x]$ – вектор-рядок Тейлора n-го степеня для однієї незалежної змінної; $\bar{C}^{\mathrm{T}}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів інтерполянти.

Табл. 2. Загальний вигляд таблично-заданої функції від однієї незалежної змінної для P вузлів інтерполяції / The general view of the table-specified function from one independent variable for P interpolation nodes

№ вузла / Змінна	1	2	…	p	…	P
x	x_1	x_2	…	x_p	…	x_P
V	v_1	v_2	…	v_p	…	v_P

У роботі [32] зазначено, що для визначення коефіцієнтів інтерполянти $\bar{C}^{\mathrm{T}}$, заданої многочленом Тейлора n-го степеня, потрібно побудувати у матричному вигляді таку лінійну систему алгебричних рівнянь:

$$\bar{\bar{T}}^n[\bar{X}] \times \bar{C}^{\mathrm{T}} = \bar{V}^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

де $\bar{X} = [x_p, p = \overline{1,P}]$ – значення вузлових точок; $\bar{V}^{\mathrm{T}} = [v_p^{\mathrm{T}}, p = \overline{1,P}]$ – вузловий вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції; $\bar{C}^{\mathrm{T}} = [c_j^{\mathrm{T}},\ j = \overline{0,n}]$ – невідомі значення коефіцієнтів інтерполянти; $\bar{\bar{T}}^{n}[\bar{X}]$ – матриця Тейлора n-го порядку, елементи якої визначають за вузловими точками таблично-заданої функції.

З виразу (2) видно, що стовпець $\bar{C}^{\mathrm{T}}$ є коренем лінійного матричного рівняння:

$$\bar{C}^{\mathrm{T}} = \bar{\bar{T}}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{V}^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

де $\bar{\bar{T}}[\bar{X}]^{-1}$ – матриця, обернена до матриці Тейлора.

З виразу (1) видно, що для обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці потрібно перемножити вектор-рядок Тейлора, обчисленого за прийнятим значенням незалежної змінної, на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, внаслідок чого отримаємо число – значення функції. Щоб обчислити похідну в будь-якому вузлі інтерполяції, потрібно між цими двома векторами розмістити якусь матрицю (як виявиться нижче – квадратну й одиничну), яка б давала змогу дещо змістити елементи вектора-рядка Тейлора вліво та, перемноживши його на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, можна було б отримати число, яке вказуватиме на значення похідної у прийнятому значенні незалежної змінної.

З урахуванням зазначеного вище, похідні 1-го, 2-го та k-го порядків ($k \leq n$) від многочлена (1) можна визначити за однією з таких формул:

$$\begin{gathered}\frac{dV}{dx} = c_1 + c_2\frac{x}{1!} + c_3\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_P\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{T}^{n}[x] \times \bar{\bar{D}}_x^{1} \times \bar{C}^{\mathrm{T}};\\ \frac{d^2V}{dx^2} = c_2 + c_3\frac{x}{1!} + c_4\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_P\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = \bar{T}^{n}[x] \times \bar{\bar{D}}_x^{2} \times \bar{C}^{\mathrm{T}};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d^kV}{dx^k} = c_k + c_{k+1}\frac{x}{1!} + c_{k+2}\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_P\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \bar{T}^{n}[x] \times \bar{\bar{D}}_x^{k} \times \bar{C}^{\mathrm{T}},\end{gathered} \tag{4}$$

де $\bar{\bar{D}}_x^{1}$, $\bar{\bar{D}}_x^{2} = \bar{\bar{D}}_x^{1} \times \bar{\bar{D}}_x^{1}$, ..., $\bar{\bar{D}}_x^{k} = \bar{\bar{D}}_x^{k-1} \times \bar{\bar{D}}_x^{1}$ – матриці 1-го, 2-го і k-го порядків диференціювання вектора-рядка Тейлора [18].

З огляду на зазначене вище, для обчислення похідної k-го порядку від функції, заданої табл. 2, за прийнятого значення незалежної змінної $x = x'$ потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (2), розв’язати його (3) та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричні вирази (4) отримані коефіцієнти інтерполянти $\bar{C}^{\mathrm{T}}$ із матричного рівняння (3) та числове значення $x = x'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразах.

Розглянемо деякі постановки задач чисельного диференціювання таблично-заданих функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора n-го степеня та алгоритм їх розв’язання на конкретних прикладах.

***Приклад* 1.** Потрібно обчислити похідні 1-го, 2-го та 3-го порядків від функції $V = V^3[x]$, заданої у табл. 3, за прийнятого значення незалежної змінної $x = 1.1$.

Розв’язавши матричне рівняння (3), сформоване з числових значень таблично-заданої функції, отримаємо коефіцієнти інтерполянти (1), поданої у вигляді многочлена Тейлора 3-го степеня. Коефіцієнти інтерполянти подамо у вигляді вектора-рядка з числовими елементами: $\bar{C} = \begin{vmatrix} 90{,}99 & -183{,}84 & 264{,}37 & -194{,}86 \end{vmatrix}$.

Табл. 3. Значення таблично-заданої функції від однієї незалежної змінної / The value of the table-specified function from one independent variable

№ вузла / Змінна	1	2	3	4
x	0,9	1,0	1,25	1,5
V	8,93	6,86	4,30	3,04

Значення похідної 1-го, 2-го та 3-го порядків від функції $V = V^3[x]$ при $x = x' = 1{,}1$ знаходимо за формулами (4), внаслідок чого отримаємо:

$$\begin{gathered}\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x'=1.1} = \bar{T}^3[x'] \times \bar{\bar{D}}_x^{1} \times \bar{C}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x'}{1!} & \frac{(x')^2}{2!} & \frac{(x')^3}{3!} \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}_x^{1} \times \begin{vmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{vmatrix} =\\ = \begin{vmatrix} 1 & 1.1 & 0.605 & 0.2218 \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}_x^{1} \times \begin{vmatrix} 90{,}99\\ -183{,}84\\ 264{,}37\\ -194{,}86 \end{vmatrix} = -10{,}92238;\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x'=1.1} = \bar{T}^3[x'] \times \bar{\bar{D}}_x^{2} \times \bar{C}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x'}{1!} & \frac{(x')^2}{2!} & \frac{(x')^3}{3!} \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}_x^{2} \times \begin{vmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{vmatrix} =\\ = \begin{vmatrix} 1 & 1.1 & 0.605 & 0.2218 \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}_x^{2} \times \begin{vmatrix} 90{,}99\\ -183{,}84\\ 264{,}37\\ -194{,}86 \end{vmatrix} = 50{,}028571;\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{d^3V}{dx^3}\right|_{x'=1.1} = \bar{T}^3[x'] \times \bar{\bar{D}}_x^{3} \times \bar{C}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x'}{1!} & \frac{(x')^2}{2!} & \frac{(x')^3}{3!} \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}_x^{3} \times \begin{vmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{vmatrix} =\\ = \begin{vmatrix} 1 & 1.1 & 0.605 & 0.2218 \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}_x^{3} \times \begin{vmatrix} 90{,}99\\ -183{,}84\\ 264{,}37\\ -194{,}86 \end{vmatrix} = -194{,}857143,\end{gathered} \tag{7}$$

де $\bar{\bar{D}}_x^{1} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; $\bar{\bar{D}}_x^{2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; $\bar{\bar{D}}_x^{3} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ – матриці 1-го, 2-го й 3-го порядків диференціювання вектора-рядка Тейлора, їх можна визначити як $\bar{\bar{D}}_x^{2} = \bar{\bar{D}}_x^{1} \times \bar{\bar{D}}_x^{1}$ і $\bar{\bar{D}}_x^{3} = \bar{\bar{D}}_x^{2} \times \bar{\bar{D}}_x^{1}$ [18].

Правильність обчислення похідної 1-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць [47], ст. 635, (8.3), а саме:

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x'} \approx \frac{V[x+h] - V[x-h]}{2 \cdot h}. \tag{8}$$

Результати обчислення похідних 1-го порядку, залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки x', наведено в табл. 4. Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

З даних цієї таблиці видно, що за кроку $h = 0{,}0001$ обчислена похідна 1-го порядку за змінною x із використанням формули центральних скінченних різниць (8) практично збігається зі значенням (5), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Тейлора 3-го степеня, тобто значення похідної обчислено правильно.

Правильність обчислення похідної 2-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць [47], ст. 636, (8.6), а саме:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x'} \approx \frac{V[x+h] - 2V[x] - V[x-h]}{h^2}. \tag{9}$$

Результати обчислення похідних 2-го порядку, залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки x', наведено в табл. 5.

Табл. 4. Результати обчислення похідних 1-го порядку за змінною x з використанням формули (8) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the 1st-order derivatives for the variable x using formula (8) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^1[x] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0001
V_{-1h}	8,93000	6,86000	6,09786	5,59690	5,54038	5,49609	5,48624
V_{+1h}	4,04143	4,61057	4,99750	5,37839	5,43115	5,47425	5,48405
dV/dx	-12,22143	-11,24714	-11,00357	-10,92563	-10,92319	-10,92241	**-10,92238**

Табл. 5. Результати обчислення похідних 2-го порядку за змінною x з використанням формули (9) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the 2st-order derivatives for the variable x using formula (9) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^2[x] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
V_{-1h}	8,93000	6,86000	6,09786	5,59690	5,54038	5,49609
V_{0h}	5,48514	5,48514	5,48514	5,48514	5,48514	5,48514
V_{+1h}	4,04143	4,61057	4,99750	5,37839	5,43115	5,47425
dV/dx	50,028571	50,028571	50,028571	50,028571	50,028571	**50,028571**

Табл. 6. Результати обчислення похідних 3-го порядку за змінною x з використанням формули (10) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the 3st-order derivatives for the variable x using formula (10) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^3[x] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
V_{-2h}	15,93486	8,93000	6,86000	5,71386	5,59690	5,50709
V_{-1h}	8,93000	6,86000	6,09786	5,59690	5,54038	5,49609
V_{+1h}	4,04143	4,61057	4,99750	5,37839	5,43115	5,47425
V_{+2h}	3,04000	4,04143	4,61057	5,27644	5,37839	5,46340
dV/dx	-194,857143	-194,857143	-194,857143	-194,857143	**-194,857143**	-194,857133

Правильність обчислення похідної 3-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць:

$$\left.\frac{d^3V}{dx^3}\right|_{x=x'} \approx \frac{V[x+2h]-2V[x+h]+2V[x-h]-V[x-2h]}{2\cdot h^3}. \quad (10)$$

Результати обчислення похідних 3-го порядку, залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки x', наведено в табл. 6.

З даних цієї таблиці видно, що за кроку $h = 0{,}005$ обчислена похідна 3-го порядку за змінною x, із використанням формули центральних скінченних різниць (10), практично збігається зі значенням (7), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Тейлора 3-го степеня, тобто значення похідної обчислено правильно.

Отже, наведено деякі особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, з використанням многочлена Тейлора n-го степеня для однієї незалежної змінної в довільно розташованих вузлах інтерполяції. Встановлено, що для обчислення похідної k-го порядку від функції, заданої таблицею, за прийнятим значенням незалежної змінної $x = x'$ потрібно виконати такі дії: за даними таблично-заданої функції сформувати матричне рівняння, розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти; підставити у відповідний матричний вираз коефіцієнти інтерполянти та значення змінної $x = x'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразі.

2.2. Чисельне диференціювання таблично-заданих функцій від двох незалежних змінних із використанням многочлена Тейлора n-го степеня. Загалом, функцію $V = V^n[x_1,x_2]$, яку задано у табл. 7, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$V^n[x_1,x_2] = c_0 + c_1\frac{x_1}{1!} + c_2\frac{x_2}{1!} + c_3\frac{x_1^2}{2!} + c_4\frac{x_1x_2}{1!1!} + \\ + c_5\frac{x_2^2}{2!} + c_6\frac{x_1^3}{3!} + \ldots + c_p\frac{x_2^n}{n!} = \bar{T}^n[x_1,x_2]\times\bar{C}^{\text{т}}, \quad (11)$$

де $\bar{T}^n[x_1,x_2]$ – вектор-рядок Тейлора n-го степеня для двох незалежних змінних; $\bar{C}^{\text{т}}$ – вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, значення яких визначають шляхом розв'язання лінійного матричного рівняння:

$$\bar{\bar{\bar{T}}}^n[\bar{\bar{\bar{X}}}]\times\bar{C}^{\text{т}} = \bar{V}^{\text{т}} \Rightarrow \bar{C}^{\text{т}} = \bar{\bar{\bar{T}}}[\bar{\bar{\bar{X}}}]^{-1}\times\bar{V}^{\text{т}}, \quad (12)$$

де $\bar{\bar{\bar{T}}}^n[\bar{\bar{\bar{X}}}]$ – матриця Тейлора n-го порядку, елементи якої визначають за вузловими точками таблично-заданої функції; $\bar{\bar{\bar{T}}}[\bar{\bar{\bar{X}}}]^{-1}$ – матриця, обернена до матриці Тейлора; $\bar{V}^{\text{т}}$ – вузловий вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції.

Табл. 7. Загальний вигляд таблично-заданої функції від двох незалежних змінних / The general view of the table-specified function from two independent variable

Змінні \ № вузла	1	2	…	p	…	P
x_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,p}$	…	$x_{1,P}$
x_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,p}$	…	$x_{2,P}$
V	v_1	v_2	…	v_p	…	v_P

1. Частинні похідні 1-го порядку від многочлена Тейлора (11) за незалежними змінними x_1 та x_2 (за умови, що $n \geq 1$), за аналогією з (4), визначають за одним із таких матричних виразів:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = c_1 + c_3\frac{x_1}{1!} + c_4\frac{x_2}{1!} + c_6\frac{x_1^2}{2!} + \ldots + c_{d-1}\frac{x_1x_2^{n-1}}{1!(n-1)!} = \\ = \bar{T}^n[x_1,x_2]\times\bar{\bar{D}}_{x_1}^1\times\bar{C}^{\text{т}}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = c_2 + c_4\frac{x_1}{1!} + c_5\frac{x_2}{1!} + \ldots + c_d\frac{x_2^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{T}^n[x_1,x_2]\times\bar{\bar{D}}_{x_2}^1\times\bar{C}^{\text{т}},$$

де $\bar{\bar{D}}_{x_1}^1$, $\bar{\bar{D}}_{x_2}^1$ – матриці 1-го порядку диференціювання вектора-рядка Тейлора $\bar{T}^n[x_1,x_2]$, відповідно, за змінними x_1 та x_2 [18].

З огляду на зазначене вище, для обчислення частинних похідних 1-го порядку від функції, заданої у табл. 7, за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = x_1'$ та $x_2 = x_2'$, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (12), розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричні вирази (13) отримані коефіцієнти інтерполянти $\bar{C}^{\text{т}}$ та числові значення $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразах.

2. Частинні похідні 2-го порядку та мішану похідну від многочлена Тейлора (11) за незалежними змінними x_1 та x_2 (за умови, що $n \geq 2$) визначають за одним із таких матричних виразів:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = c_3 + c_6 \frac{x_1}{1!} + c_7 \frac{x_2}{1!} \ldots + c_{d-2} \frac{x_2^{n-2}}{(n-2)!} = \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} \times \bar{C}_3^{\text{т}};\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = c_5 + c_8 \frac{x_1}{1!} + c_9 \frac{x_2}{1!} + \ldots + c_d \frac{x_2^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} \times \bar{C}_3^{\text{т}};\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 x_2} = c_4 + c_7 \frac{x_1}{1!} + c_8 \frac{x_2}{1!} + \ldots + c_{d-1} \frac{x_1^{n-3} x_2^{n-1}}{(n-3)!(n-1)!} =\\
&= \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1 x_2} \times \bar{C}_3^{\text{т}},
\end{aligned} \tag{14}$$

де $\bar{\bar{D}}^2_{x_1} = \bar{\bar{D}}^1_{x_1} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1}$, $\bar{\bar{D}}^2_{x_2} = \bar{\bar{D}}^1_{x_2} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2}$, $\bar{\bar{D}}^2_{x_1 x_2} = \bar{\bar{D}}^1_{x_1} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2}$ – матриці 2-го порядку диференціювання вектора-рядка Тейлора $\bar{T}^n[x_1, x_2]$, відповідно, за змінними x_1 та x_2 [48].

З огляду на зазначене вище, для обчислення частинних похідних 2-го порядку та мішану похідну від функції, заданої у табл. 7, за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = x_1'$ та $x_2 = x_2'$ потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (12), розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричні вирази (14) отримані коефіцієнти інтерполянти $\bar{C}^{\text{т}}$ та числові значення $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразах.

3. Частинні та мішані похідні 3-го порядку від многочлена Тейлора (11) за незалежними змінними x_1 та x_2 (за умови, що $n \geq 3$) визначають за одним із таких матричних виразів:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} = c_6 + c_{10} \frac{x_1}{1!} + c_{11} \frac{x_2}{1!} \ldots + c_{d-3} \frac{x_2^{n-3}}{(n-3)!} = \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_1^3} \times \bar{C}_3^{\text{т}};\\
&\frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3} = c_9 + c_{13} \frac{x_1}{1!} + c_{17} \frac{x_2}{1!} + \ldots + c_d \frac{x_2^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_2^3} \times \bar{C}_3^{\text{т}};\\
&\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2 x_2} = c_7 + c_{11} \frac{x_1}{1!} + c_{12} \frac{x_2}{1!} + \ldots + c_{d-2} \frac{x_1^{n-3} x_2^{n-2}}{(n-3)!(n-2)!} =\\
&= \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_1^2 x_2} \times \bar{C}_3^{\text{т}},\\
&\frac{\partial^3 V}{\partial x_1 x_2^2} = c_8 + c_{12} \frac{x_1}{1!} + c_{13} \frac{x_2}{1!} + \ldots + c_{d-1} \frac{x_1^{n-4} x_2^{n-1}}{(n-4)!(n-1)!} =\\
&= \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_1 x_2^2} \times \bar{C}_3^{\text{т}},
\end{aligned} \tag{15}$$

де $\bar{\bar{D}}^3_{x_1} = \bar{\bar{D}}^2_{x_1} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1}$, $\bar{\bar{D}}^3_{x_2} = \bar{\bar{D}}^2_{x_2} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2}$, $\bar{\bar{D}}^3_{x_1^2 x_2} = \bar{\bar{D}}^2_{x_1 x_2} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1}$, $\bar{\bar{D}}^3_{x_1 x_2^2} = \bar{\bar{D}}^2_{x_1 x_2} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2}$ – матриці 3-го порядку диференціювання вектора-рядка Тейлора $\bar{T}^n[x_1, x_2]$, відповідно, за змінними x_1 та x_2 [18].

З огляду на зазначене вище, для обчислення значень частинних і мішаних похідних 3-го порядку від функції, заданої у табл. 7, за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = x_1'$ та $x_2 = x_2'$, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (12), розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричні вирази (13) отримані коефіцієнти інтерполянти $\bar{C}^{\text{т}}$ та числові значення $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразах.

4. Розглянемо деякі постановки задач чисельного диференціювання таблично-заданих функцій від двох незалежних змінних із використанням многочлена Тейлора n-го степеня та алгоритм їх розв'язання на конкретних прикладах.

***Приклад* 2.** Потрібно обчислити значення частинних похідних 1-го і 2-го порядків і мішану похідну від функції $V = V^2[x_1, x_2]$, заданої у табл. 8, за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = 15$ та $x_2 = 70$.

Табл. 8. Значення таблично-заданої функції від двох незалежних змінних / The value of the table-specified function from two independent variables

№ вузла / Змінні	1	2	3	4	5	6
x_1	-10	-10	-10	5	5	20
x_2	46	68	95	62	84	74
V	10	14	26	12	18	14

Розв'язавши матричне рівняння (12), сформоване з числових значень таблично-заданої функції, отримаємо коефіцієнти інтерполянти (11), поданої у вигляді многочлена Тейлора 2-го степеня. Коефіцієнти інтерполянти подамо у вигляді вектора-рядка з числовими елементами:

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} 21.3887 & 0.3150 & -0.4829 & 0.0033 & -0.0054 & 0.0107 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Значення частинних похідних 1-го, 2-го порядків і мішаної похідної від інтерполянти $V = V^2[x_1, x_2]$ за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = x_1' = 15$ та $x_2 = x_2' = 70$ знаходимо за формулами (13) і (14):

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial V}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^2[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1} \times \bar{C}_2^{\text{т}} =\\
&= \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1'}{1!} & \frac{x_2'}{1!} & \frac{(x_1')^2}{2!} & \frac{x_1'}{1!}\frac{x_2'}{1!} & \frac{(x_2')^2}{2!} \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} =
\end{aligned} \tag{17}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 15 & 70 & 112.5 & 1050 & 2450 \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1} \times \begin{vmatrix} 21.3887 \\ 0.3150 \\ -0.4829 \\ 0.0033 \\ -0.0054 \\ 0.0107 \end{vmatrix} = -0.012341.$$

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^2[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2} \times \bar{C}_2^{\text{т}} =\\
&= \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1'}{1!} & \frac{x_2'}{1!} & \frac{(x_1')^2}{2!} & \frac{x_1'}{1!}\frac{x_2'}{1!} & \frac{(x_2')^2}{2!} \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} =
\end{aligned} \tag{18}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 15 & 70 & 112.5 & 1050 & 2450 \end{vmatrix} \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2} \times \begin{vmatrix} 21.3887 \\ 0.3150 \\ -0.4829 \\ 0.0033 \\ -0.0054 \\ 0.0107 \end{vmatrix} = 0.186834.$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^2[x_1',x_2'] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} \times \bar{C}_2^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left| 1 \quad \frac{x_1'}{1!} \quad \frac{x_2'}{1!} \quad \frac{(x_1')^2}{2!} \quad \frac{x_1'}{1!}\frac{x_2'}{1!} \quad \frac{(x_2')^2}{2!} \right| \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} = \qquad (19)$$

$$= \left| 1 \quad 15 \quad 70 \quad 112.5 \quad 1050 \quad 2450 \right| \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} \times \begin{vmatrix} 21.3887 \\ 0.3150 \\ -0.4829 \\ 0.0033 \\ -0.0054 \\ 0.0107 \end{vmatrix} = 0.00325431 .$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^2[x_1',x_2'] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} \times \bar{C}_2^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left| 1 \quad \frac{x_1'}{1!} \quad \frac{x_2'}{1!} \quad \frac{(x_1')^2}{2!} \quad \frac{x_1'}{1!}\frac{x_2'}{1!} \quad \frac{(x_2')^2}{2!} \right| \times \bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} = \qquad (20)$$

$$= \left| 1 \quad 15 \quad 70 \quad 112.5 \quad 1050 \quad 2450 \right| \times \bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} \times \begin{vmatrix} 21.3887 \\ 0.3150 \\ -0.4829 \\ 0.0033 \\ -0.0054 \\ 0.0107 \end{vmatrix} = 0.01071944 .$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^2[x_1',x_2'] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1x_2} \times \bar{C}_2^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left| 1 \quad \frac{x_1'}{1!} \quad \frac{x_2'}{1!} \quad \frac{(x_1')^2}{2!} \quad \frac{x_1'}{1!}\frac{x_2'}{1!} \quad \frac{(x_2')^2}{2!} \right| \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1x_2} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix} = \qquad (21)$$

$$= \left| 1 \quad 15 \quad 70 \quad 112.5 \quad 1050 \quad 2450 \right| \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1x_2} \times \begin{vmatrix} 21.3887 \\ 0.3150 \\ -0.4829 \\ 0.0033 \\ -0.0054 \\ 0.0107 \end{vmatrix} = -0.00537346 ,$$

де:

$$\bar{\bar{D}}^1_{x_1} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \bar{\bar{D}}^1_{x_2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \bar{\bar{D}}^2_{x_1x_2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Правильність обчислення частинних похідних 1-го порядку за змінними x_1 та x_2 перевіримо з використанням формул центральних скінченних різниць [47], ст. 635, (8.3), а саме:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1+h,x_2]-V[x_1-h,x_2]}{2\cdot h}; \qquad (22)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1,x_2+h]-V[x_1,x_2-h]}{2\cdot h}. \qquad (23)$$

Результати обчислення частинних похідних 1-го порядку за змінними x_1 та x_2 залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки $x_1 = x_1'$ та $x_2 = x_2'$, наведено в табл. 9 і табл. 10. Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

З даних цих таблиць видно, що за кроку h = 0,001 обчислені частинні похідні 1-го порядку за змінними x_1 та x_2 із використанням формул центральних скінченних різниць (22) і (23) практично збігаються зі значеннями (17) і (18), отриманими за допомогою інтерполяційного многочлена Тейлора 2-го степеня, тобто значення частинних похідних обчислено правильно.

Правильність обчислення частинних похідних 2-го порядку та мішаної похідної за змінними x_1 та x_2 перевіримо з використанням формул центральних скінченних різниць [47], ст. 637, (8.10), а саме:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1+h,x_2]-2V[x_1,x_2]+V[x_1-h,x_2]}{h^2}. \qquad (24)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1,x_2+h]-2V[x_1,x_2]+V[x_1,x_2-h]}{h^2}. \qquad (25)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 x_2}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1+h,x_2+h]-V[x_1-h,x_2+h]}{4\cdot h^2} - \qquad (26)$$
$$-\frac{V[x_1+h,x_2-h]-V[x_1-h,x_2-h]}{4\cdot h^2}.$$

Результати обчислення частинних похідних 2-го порядку та мішаної похідної, залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки $x_1 = x_1'$ та $x_2 = x_2'$ наведено в табл. 11, табл. 12 і табл. 13.

З даних цих таблиць видно, що за кроку h = 0,001 обчислені частинні похідні 2-го порядку та мішана похідна за змінними x_1 та x_2 із використанням формул центральних скінченних різниць (24)–(26) практично збігаються зі значеннями (19)–(21), отриманими за допомогою інтерполяційного многочлена Тейлора 2-го степеня, тобто значення похідних обчислено правильно.

Табл. 9. Результати обчислення частинних похідних 1-го порядку за змінною x_1 з використанням формули (22) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the partial derivatives of the 1st order by the variable x_1 using formula (22) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^1[x_1,x_2] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0001
$V_{-1,0}$	13,29794	13,29665	13,29602	13,29553	13,29546	13,29542	13,29540
$V_{+1,0}$	13,29300	13,29419	13,29479	13,29528	13,29534	13,29539	13,29540
$\partial V/\partial x_1$	-0,012341	-0,012341	-0,012341	-0,012341	-0,012341	**-0,012341**	-0,012341

Табл. 10. Результати обчислення частинних похідних 1-го порядку за змінною x_2 з використанням формули (23) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the partial derivatives of the 1st order by the variable x_2 using formula (23) depending on the step h between the interpolation nodes яції

$V^1[x_1,x_2] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$V_{0,-1}$	13,25825	13,27677	13,28607	13,29354	13,29447	13,29522
$V_{0,+1}$	13,33298	13,31414	13,30476	13,29727	13,29634	13,29559
$\partial V/\partial x_2$	0,186834	0,186834	0,186834	0,186834	0,186834	**0,186834**

Табл. 11. Результати обчислення частинних похідних 2-го порядку за змінною x_1 з використанням формули (24) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the partial derivatives of the 2nd order by the variable x_1 using formula (24) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^2[x_1,x_2] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$V_{-1,0}$	13,29794	13,29665	13,29602	13,29553	13,29546	13,29542
$V_{0,0}$	13,29540	13,29540	13,29540	13,29540	13,29540	13,29540
$V_{+1,0}$	13,29300	13,29419	13,29479	13,29528	13,29534	13,29539
$\partial^2 V/\partial x_1^2$	0,00325431	0,00325431	0,00325431	0,00325431	0,00325431	**0,00325431**

Табл. 12. Результати обчислення частинних похідних 2-го порядку за змінною x_2 з використанням формули (25) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of the partial derivatives of the 2nd order by the variable x_2 using formula (25) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^2[x_1,x_2] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$V_{0,-1}$	13,25825	13,27677	13,28607	13,29354	13,29447	13,29522
$V_{0,0}$	13,29540	13,29540	13,29540	13,29540	13,29540	13,29540
$V_{0,+1}$	13,33298	13,31414	13,30476	13,29727	13,29634	13,29559
$\partial^2 V/\partial x_2^2$	0,01071944	0,01071944	0,01071944	0,01071944	0,01071944	**0,01071944**

Табл. 13. Результати обчислення мішаних похідних 2-го порядку за змінними x_1 та x_2 з використанням формули (26) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції / The results of the calculation of mixed derivatives of the 2nd order by the variables x_1 and x_2 using formula (26) depending on the step h between the interpolation nodes

$V^2[x_1,x_2] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$V_{-1,-1}$	13,26057	13,27797	13,28668	13,29366	13,29453	13,29523
$V_{-1,+1}$	13,33573	13,31544	13,30539	13,29740	13,29640	13,29560
$V_{+1,-1}$	13,25606	13,27561	13,28548	13,29341	13,29441	13,29520
$V_{+1,+1}$	13,33037	13,31287	13,30413	13,29715	13,29628	13,29558
$\partial^2 V/\partial x_1 x_2$	-0,00537346	-0,00537346	-0,00537346	-0,00537346	-0,00537346	**-0,00537346**

***Приклад* 3**. Потрібно обчислити значення частинних похідних 1-го, 2-го й 3-го порядків, а також, відповідно, мішаних похідних від функції $V = V^3[x_1,x_2]$, заданої у табл. 14, за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = 15$ та $x_2 = 70$.

Табл. 14. Значення таблично-заданої функції від двох незалежних змінних / The value of the table-specified function from two independent variables

№ вузла / Змінні	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	-10	-10	-10	5	5	20	-5	-5	10	15
x_2	46	68	95	62	84	74	23	98	20	57
V	10	14	26	12	18	14	9	22	8	13

Інтерполяційну функцію, задану у табл. 14, подамо у вигляді многочлена Тейлора 3-го степеня для двох незалежних змінних такого вигляду:

$$\begin{aligned} V^3[x_1,x_2] &= c_0 + c_1\frac{x_1}{1!} + c_2\frac{x_2}{1!} + c_3\frac{x_1^2}{2!} + c_4\frac{x_1}{1!}\frac{x_2}{1!} + c_5\frac{x_2^2}{2!} + \\ &+ c_6\frac{x_1^3}{2!} + c_7\frac{x_1^2}{2!}\frac{x_2}{1!} + c_8\frac{x_1}{1!}\frac{x_2^2}{2!} + c_9\frac{x_2^3}{3!} = \overline{T}^3[x_1,x_2]\times\overline{C}_{\#}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \quad (27)$$

де $\overline{T}^3[x_1,x_2] = \left|1 \;\; \frac{x_1}{1!} \;\; \frac{x_2}{1!} \;\; \frac{x_1^2}{2!} \;\; \frac{x_1}{1!}\frac{x_2}{1!} \;\; \frac{x_2^2}{2!} \;\; \frac{x_1^3}{2!} \;\; \frac{x_1^2}{2!}\frac{x_2}{1!} \;\; \frac{x_1}{1!}\frac{x_2^2}{2!} \;\; \frac{x_2^3}{3!}\right|$ – вектор-рядок Тейлора 3-го степеня для двох незалежних змінних; $\overline{C}^{\mathrm{T}} = \left|c_0 \;\; c_1 \;\; c_2 \;\; c_3 \;\; c_4 \;\; c_5 \;\; c_6 \;\; c_7 \;\; c_8 \;\; c_9\right|^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, для визначення яких використовують лінійну систему алгебричних рівнянь (28).

Розв'язавши систему рівнянь (28), сформовану з числових значень таблично-заданої функції (табл. 14), отримаємо її корені, які водночас і будуть коефіцієнтами інтерполянти, поданої у вигляді многочлена Тейлора 3-го степеня (27).

Значення частинних похідних 1-го, 2-го й 3-го порядків, а також відповідні мішані похідні від інтерполянти $V = V^3[x_1,x_2]$, за прийнятих значень незалежних змінних $x_1 = x_1' = 15$ та $x_2 = x_2' = 70$, знаходимо за формулами (13), (14) і (15), а обчислені результати показано у матричних виразах (29)–(37). Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

$$\begin{cases}
c_0 + c_1\frac{(-10)}{1!} + c_2\frac{46}{1!} + c_3\frac{(-10)^2}{2!} + c_4\frac{(-10)}{1!}\frac{46}{1!} + c_5\frac{46^2}{2!} + c_6\frac{(-10)^3}{3!} + c_7\frac{(-10)^2}{2!}\frac{46}{1!} + c_8\frac{(-10)}{1!}\frac{46^2}{2!} + c_9\frac{46^3}{3!} = 10;\\
c_0 + c_1\frac{(-10)}{1!} + c_2\frac{68}{1!} + c_3\frac{(-10)^2}{2!} + c_4\frac{(-10)}{1!}\frac{68}{1!} + c_5\frac{68^2}{2!} + c_6\frac{(-10)^3}{3!} + c_7\frac{(-10)^2}{2!}\frac{68}{1!} + c_8\frac{(-10)}{1!}\frac{68^2}{2!} + c_9\frac{68^3}{3!} = 14;\\
c_0 + c_1\frac{(-10)}{1!} + c_2\frac{95}{1!} + c_3\frac{(-10)^2}{2!} + c_4\frac{(-10)}{1!}\frac{95}{1!} + c_5\frac{95^2}{2!} + c_6\frac{(-10)^3}{3!} + c_7\frac{(-10)^2}{2!}\frac{95}{1!} + c_8\frac{(-10)}{1!}\frac{95^2}{2!} + c_9\frac{95^3}{3!} = 26;\\
c_0 + c_1\frac{5}{1!} + c_2\frac{62}{1!} + c_3\frac{5^2}{2!} + c_4\frac{5}{1!}\frac{62}{1!} + c_5\frac{62^2}{2!} + c_6\frac{5^3}{3!} + c_7\frac{5^2}{2!}\frac{62}{1!} + c_8\frac{5}{1!}\frac{62^2}{2!} + c_9\frac{62^3}{3!} = 12;\\
c_0 + c_1\frac{5}{1!} + c_2\frac{84}{1!} + c_3\frac{5^2}{2!} + c_4\frac{5}{1!}\frac{84}{1!} + c_5\frac{84^2}{2!} + c_6\frac{5^3}{3!} + c_7\frac{5^2}{2!}\frac{84}{1!} + c_8\frac{5}{1!}\frac{84^2}{2!} + c_9\frac{84^3}{3!} = 18;\\
c_0 + c_1\frac{20}{1!} + c_2\frac{74}{1!} + c_3\frac{20^2}{2!} + c_4\frac{20}{1!}\frac{74}{1!} + c_5\frac{74^2}{2!} + c_6\frac{20^3}{3!} + c_7\frac{20^2}{2!}\frac{74}{1!} + c_8\frac{20}{1!}\frac{74^2}{2!} + c_9\frac{74^3}{3!} = 14;\\
c_0 + c_1\frac{(-5)}{1!} + c_2\frac{23}{1!} + c_3\frac{(-5)^2}{2!} + c_4\frac{(-5)}{1!}\frac{23}{1!} + c_5\frac{23^2}{2!} + c_6\frac{(-5)^3}{3!} + c_7\frac{(-5)^2}{2!}\frac{23}{1!} + c_8\frac{(-5)}{1!}\frac{23^2}{2!} + c_9\frac{23^3}{3!} = 9;\\
c_0 + c_1\frac{(-5)}{1!} + c_2\frac{98}{1!} + c_3\frac{(-5)^2}{2!} + c_4\frac{(-5)}{1!}\frac{98}{1!} + c_5\frac{98^2}{2!} + c_6\frac{(-5)^3}{3!} + c_7\frac{(-5)^2}{2!}\frac{98}{1!} + c_8\frac{(-5)}{1!}\frac{98^2}{2!} + c_9\frac{98^3}{3!} = 22;\\
c_0 + c_1\frac{10}{1!} + c_2\frac{20}{1!} + c_3\frac{10^2}{2!} + c_4\frac{10}{1!}\frac{20}{1!} + c_5\frac{20^2}{2!} + c_6\frac{10^3}{3!} + c_7\frac{10^2}{2!}\frac{20}{1!} + c_8\frac{10}{1!}\frac{20^2}{2!} + c_9\frac{20^3}{3!} = 8;\\
c_0 + c_1\frac{15}{1!} + c_2\frac{57}{1!} + c_3\frac{15^2}{2!} + c_4\frac{15}{1!}\frac{57}{1!} + c_5\frac{57^2}{2!} + c_6\frac{15^3}{3!} + c_7\frac{15^2}{2!}\frac{57}{1!} + c_8\frac{15}{1!}\frac{57^2}{2!} + c_9\frac{57^3}{3!} = 13.
\end{cases} \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^1_{x_1} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = -0{,}301525\,; \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^1_{x_2} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = 0{,}286751\,; \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = -0{,}172179\,; \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = -0{,}001334\,; \tag{32}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^2_{x_1 x_2} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = 0{,}004733\,; \tag{33}$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_1^3} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = -0{,}016953\,; \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_2^3} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = -0{,}000177\,; \tag{35}$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_1^2 x_2} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = 0{,}000546\,; \tag{36}$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right|_{\substack{x_1'=15\\ x_2'=70}} = \bar{T}^3[x_1', x_2'] \times \bar{\bar{D}}^3_{x_1 x_2^2} \times \bar{C}_3^{\mathrm{T}} = -0{,}000480\,, \tag{37}$$

де матриці 1-го, 2-го і 3-го порядків диференціювання вектора-рядка Тейлора, відповідно, за змінними x_1 та x_2 мають такий вигляд:

$$\bar{\bar{D}}^1_{x_1} = \begin{Vmatrix}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}; \tag{38}$$

$$\bar{\bar{D}}^1_{x_2} = \begin{Vmatrix}
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}; \tag{39}$$

$$\bar{\bar{D}}^2_{x_1^2} = \begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}; \tag{40}$$

$$\bar{\bar{D}}^2_{x_2^2} = \begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}; \tag{41}$$

$$\bar{\bar{D}}^2_{x_1 x_2} = \begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}; \tag{42}$$

$$\bar{\bar{D}}^3_{x_1^3} = \begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}; \tag{43}$$

$$\overline{\overline{D}}{}^{3}_{x_2^3} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \qquad (44)$$

Правильність обчислення частинних похідних 1-го і 2-го порядків, а також мішаної похідної 2-го порядку, за змінними x_1 та x_2, перевіримо, з використанням формул центральних скінченних різниць (22)–(26). Водночас, правильність обчислення частинних і мішаних похідних 3-го порядку, за змінними x_1 та x_2, перевіримо з використанням формул центральних скінченних різниць (47)–(50).

$$\overline{\overline{D}}{}^{3}_{x_1^2 x_2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \qquad (45)$$

$$\overline{\overline{D}}{}^{3}_{x_1 x_1^2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (46)$$

Допитливому читачеві пропонуємо самостійно виконати обчислення частинних похідних 1-го і 2-го порядків, а також мішаної похідної 2-го порядку від многочлена Тейлора 3-го степеня (27), за змінними x_1 та x_2, із використанням формул центральних скінченних різниць (22)–(26). Аналогічно можна обчислити частинні та мішані похідні 3-го порядку, залежно від кроку *h,* між вузлами інтерполяції в околі точки $x_1 = x_1'$ та $x_2 = x_2'$, із використанням формул центральних скінченних різниць (47)–(50).

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1+2h,x_2]-2V[x_1+h,x_2]+2V[x_1-h,x_2]-V[x_1-2h,x_2]}{2\cdot h^3}; \qquad (47)$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1,x_2+2h]-2V[x_1,x_2+h]+2V[x_1,x_2-h]-V[x_1,x_2-2h]}{2\cdot h^3}; \qquad (48)$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2 x_2}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1+2h,x_2+h]-2V[x_1,x_2+h]-V[x_1+2h,x_2-h]+2V[x_1,x_2-h]+V[x_1-2h,x_2+h]-V[x_1-2h,x_2-h]}{8\cdot h^3}; \qquad (49)$$

$$\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x_1 x_2^2}\right|_{\substack{x_1=x_1'\\x_2=x_2'}} \approx \frac{V[x_1+h,x_2+2h]-V[x_1-h,x_2+2h]-2V[x_1+h,x_2]+2V[x_1-h,x_2]+V[x_1+h,x_2-2h]-V[x_1-h,x_2-2h]}{8\cdot h^3}. \qquad (50)$$

Отже, наведено деякі особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня для двох незалежних змінних у довільно розташованих вузлах інтерполяції. Встановлено, що для обчислення частинних похідних *k*-го порядку від функції, заданої таблицею, за прийнятими значеннями незалежних змінних $x_1 = x'_1$ та $x_2 = x'_2$, потрібно виконати такі дії: за даними таблично-заданої функції сформувати матричне рівняння, розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти; підставити у відповідний матричний вираз коефіцієнти інтерполянти та значення незалежних змінних $x_1 = x'_1$ та $x_2 = x'_2$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразі.

2.3. Чисельне диференціювання таблично-заданих функцій від багатьох незалежних змінних, із використанням многочлена Тейлора. Загалом, функцію $V = V[x_i, i=\overline{1,M}] = V[\overline{X}]$, яку задано у табл. 1, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Тейлора:

$$V = V^n[\overline{X}] = c_0 + c_1\frac{x_1}{1!} + \ldots + c_M\frac{x_M}{1!} + c_{M+1}\frac{x_1^2}{2!} + \\ + c_{M+2}\frac{x_1 x_2}{1!1!} + \ldots + c_p\frac{x_M^n}{n!} = \overline{T}^n[\overline{X}]\times\overline{C}_n^{\mathrm{т}}, \qquad (51)$$

де $\overline{T}^n[x_i, i=\overline{1,M}] = \overline{T}[\overline{X}]$ – вектор-рядок Тейлора *n*-го степеня для багатьох незалежних змінних; $\overline{C}^{\mathrm{т}}$ – вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, значення яких визначають шляхом розв'язання такого лінійного матричного рівняння:

$$\overline{\overline{T}}{}^n[\overline{\overline{X}}]\times\overline{C}^{\mathrm{т}} = \overline{V}^{\mathrm{т}} \Rightarrow \overline{C}^{\mathrm{т}} = \overline{\overline{T}}[\overline{\overline{X}}]^{-1}\times\overline{V}^{\mathrm{т}}, \qquad (52)$$

де $\overline{\overline{T}}{}^n[\overline{\overline{X}}]$ – матриця Тейлора *n*-го порядку, елементи якої визначають за вузловими точками таблично-заданої функції $\overline{\overline{X}} = [\overline{X}_p = [x_{1,p}, x_{2,p}],\ p=\overline{1,P}]$; $\overline{\overline{T}}[\overline{\overline{X}}]^{-1}$ – матриця, обернена до матриці Тейлора; $\overline{V}^{\mathrm{т}}$ – вузловий вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції.

1. Частинні похідні 1-го порядку від многочлена Тейлора (51), за багатьма незалежними змінними $\overline{X} = [x_i, i=\overline{1,M}]$, визначають за такою формулою:

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial x_i} = \overline{T}^n[x_i,\, i=\overline{1,M}] \times \overline{\overline{D}}^1_{x_i} \times \overline{C}^{\text{т}},\; i=\overline{1,M}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \overline{X}} = \overline{T}^n[\overline{X}] \times \overline{\overline{D}}^1_{\overline{X}} \times \overline{C}^{\text{т}}, \tag{53}$$

де $\overline{\overline{D}}^1_{\overline{X}} = [\overline{\overline{D}}^1_{x_i},\, i=\overline{1,M}]$ – матриці 1-го порядку диференціювання вектора-рядка Тейлора $\overline{T}^n[\overline{X}]$, відповідно, за змінними $\overline{X} = [x_i,\, i=\overline{1,M}]$ [18].

З огляду на зазначене вище, для обчислення частинних похідних 1-го порядку від функції, заданої у табл. 1, за прийнятих значень незалежних змінних $\overline{X} = \overline{X}' \Rightarrow$ $[x_i = x'_i,\, i=\overline{1,M}]$, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (52), розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричний вираз (53) отримані коефіцієнти інтерполянти $\overline{C}^{\text{т}}$ та числові значення $\overline{X} = \overline{X}'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразі.

2. Частинні похідні 2-го порядку та мішану похідну від многочлена Тейлора (51), за багатьма незалежними змінними, $\overline{X} = [x_i,\, i=\overline{1,M}]$ визначають за одним із таких матричних виразів:

$$\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \overline{T}^n[x_i,\, i=\overline{1,M}] \times \overline{\overline{D}}^2_{x_i} \times \overline{C}^{\text{т}},\; i=\overline{1,M}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \overline{X}^2} = \overline{T}^n[\overline{X}] \times \overline{\overline{D}}^2_{\overline{X}} \times \overline{C}^{\text{т}};$$
$$\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i x_j} = \overline{T}^n[x_i,\, i=\overline{1,M}] \times \overline{\overline{D}}^2_{x_i x_j} \times \overline{C}^{\text{т}},\; i,j=\overline{1,M} : i \neq j\right\} \Rightarrow \tag{54}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \overline{X}' \overline{X}''} = \overline{T}^n[\overline{X}] \times \overline{\overline{D}}^2_{\overline{X}'\overline{X}''} \times \overline{C}^{\text{т}},$$

де $\overline{\overline{D}}^2_{\overline{X}} = [\overline{\overline{D}}^2_{x_i},\, i=\overline{1,M}]$, $\overline{\overline{D}}^2_{\overline{X}'\overline{X}''} = [\overline{\overline{D}}^2_{x_i x_j},\, i,j=\overline{1,M} : i \neq j]$ – матриці 2-го порядку диференціювання вектора-рядка Тейлора $\overline{T}^n[\overline{X}]$, відповідно, за змінними $\overline{X} = \overline{X}' \Rightarrow$ $[x_i = x'_i,\, i=\overline{1,M}]$, або аналогічними змінними $\overline{X} = \overline{X}'' \Rightarrow$ $[x_j = x''_j,\, j=\overline{1,M}]$ [18].

З огляду на зазначене вище, для обчислення частинних похідних 2-го порядку та мішаної похідної від функції, заданої у табл. 1, за прийнятих значень змінних $\overline{X} = \overline{X}' \Rightarrow$ $[x_i = x'_i,\, i=\overline{1,M}]$, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (52), розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричні вирази (54) отримані коефіцієнти інтерполянти $\overline{C}^{\text{т}}$ та числові значення $\overline{X} = \overline{X}'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразах.

3. Частинні та мішані похідні 3-го порядку від многочлена Тейлора (51), за багатьма незалежними змінними $\overline{X} = [x_i,\, i=\overline{1,M}]$, визначають за одним з таких матричних виразів:

$$\left\{\frac{\partial^3 V}{\partial x_i^3} = \overline{T}^n[x_i,\, i=\overline{1,M}] \times \overline{\overline{D}}^3_{x_i} \times \overline{C}^{\text{т}},\; i=\overline{1,M}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^3 V}{\partial \overline{X}^3} = \overline{T}^n[\overline{X}] \times \overline{\overline{D}}^3_{\overline{X}} \times \overline{C}^{\text{т}}; \tag{55}$$
$$\left\{\frac{\partial^3 V}{\partial x_i^k x_j^l} = \overline{T}^n[x_i,\, i=\overline{1,M}] \times \overline{\overline{D}}^3_{x_i^k x_j^l} \times \overline{C}^{\text{т}},\; \left\{\begin{matrix} i,j=\overline{1,M} : i \neq j; \\ l=\overline{1,2}; k=3-l, \end{matrix}\right\}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^3 V}{\partial \overline{X}' \overline{X}''} = \overline{T}^n[\overline{X}] \times \overline{\overline{D}}^3_{\overline{X}'\overline{X}''} \times \overline{C}^{\text{т}},$$

де $\overline{\overline{D}}^3_{\overline{X}} = [\overline{\overline{D}}^3_{x_i},\, i=\overline{1,M}]$, $\overline{\overline{D}}^3_{\overline{X}\overline{X}''} = [\overline{\overline{D}}^3_{x_i^k x_j^l},\, i,j=\overline{1,M} : i \neq j; l=\overline{1,2};$ $k=3-l,]$ – матриці 3-го порядку диференціювання вектора-рядка Тейлора $\overline{T}^n[\overline{X}]$, відповідно, за змінними $\overline{X} = \overline{X}' \Rightarrow [x_i = x'_i,\, i=\overline{1,M}]$, або аналогічними змінними $\overline{X} = \overline{X}'' \Rightarrow [x_j = x''_j,\, j=\overline{1,M}]$.

З огляду на зазначене вище, для обчислення частинних і мішаних похідних 3-го порядку від функції, заданої у табл. 1, за прийнятих значень незалежних змінних $\overline{X} = \overline{X}' \Rightarrow$ $[x_i = x'_i,\, i=\overline{1,M}]$ потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (52), розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти;
- підставити у матричні вирази (55) отримані коефіцієнти інтерполянти $\overline{C}^{\text{т}}$ та числові значення $\overline{X} = \overline{X}'$ і виконати дії множення матриць, вказані у виразах.

Отже, наведено деякі особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, з використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня для багатьох незалежних змінних у довільно розташованих вузлах інтерполяції. Встановлено, що для обчислення частинних і мішаних похідних *k*-го порядку від функції, заданої таблицею, за прийнятими значеннями незалежних змінних, потрібно виконати такі дії: за даними таблично-заданої функції сформувати матричне рівняння, розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти; підставити у відповідний матричний вираз коефіцієнти інтерполянти та значення незалежних змінних і виконати дії множення матриць, вказані у виразі.

Обговорення результатів дослідження. Чисельне диференціювання табличних функцій є цікавою темою в сфері чисельного аналізу. Це виникає у багатьох інженерних задачах, насамперед в їхніх математичних моделях станів об'єктів, процесів і явищ [10]. Основна складність чисельного диференціювання табличних функцій полягає у тому, що така процедура є некоректною, тобто малі помилки у вхідних даних можуть призвести до значних помилок під час наближеного обчислення похідних [33]. За останні роки у відкритому друці та мережі Інтернет було наведено широкий набір обчислювальних методів для вирішення проблеми чисельного диференціювання табличних функцій [8]. Згідно з наявними методами регуляризації, нові методи можна класифікувати на методи різниць, методи пом'якшення, методи усічення та методи Тихонова.

Більшість дослідників зосереджували свою увагу на одновимірному випадку, однак було опубліковано декілька праць, у яких розглянуто багатовимірні випадки [40]. В цих роботах на підставі апроксимації радіальних базисних функцій [62] автори використали напівнорму в глобальному просторі як функціонал регуляризації на кінцевому інтервалі. Розв'язуючи чисельно функціонал згладжування, було побудовано алгоритм регуляризації на підставі функції Гріна [60]. Наприклад, у роботі [63] наведено алгоритм регуляризації для реконструкції чисельних похідних із двовимірних розсіяних і водночас зашумлених даних на підставі теорії апроксимації сплайнів тонких пластин.

Внаслідок виконання дослідження отримано такі *основні наукові результати*: розроблено метод чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, з використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня від однієї та багатьох незалежних змінних у довільно розташованих вузлах інтерполяції. Особливу увагу зосереджено на матричному методі обчислення похідних *k*-го порядку, основою якого є матриця диференціювання рядка Тейлора *n*-го степеня і стовпець коефіцієнтів відповідної інтерполянти. Наведено результати обчислення похідних *k*-го порядку від інтерполянт, заданих многочленом Тейлора *n*-го степеня для відповідної кількості вузлових точок. Зроблено перевірку правильності обчислення похідних *k*-го порядку, з використанням відповідних формул центральних скінченних різниць.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – вперше розроблено метод чисельного диференціювання таблично-заданих функцій від однієї, двох і багатьох незалежних змінних у довільно розташованих вузлах інтерполяції, сутність якого зводиться до добутку трьох матриць – вектора-рядка Тейлора *n*-го степеня, визначеного за прийнятим значенням незалежної змінної, на матрицю *k*-го порядку його диференціювання ($k \le n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполяційного многочлена Тейлора *n*-го степеня.

Практична значущість результатів дослідження – розроблені алгоритми та методи чисельного диференціювання таблично-заданих функцій від однієї, двох і багатьох незалежних змінних, із використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня можна застосувати в практиці як математичного моделювання, так і комп'ютерної графіки для оброблення зображень. Основна складність полягає у тому, що малі похибки у встановленні значень функції можуть призвести до значних помилок під час обчислення похідних.

Висновки / Conclusions

Розроблено методику чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, із використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня, яка дає можливість обчислювати похідні *k*-го порядку ($k \le n$) в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції від однієї, двох і багатьох незалежних змінних. За результатами дослідження можна зробити такі висновки.

1. Проаналізовано останні дослідження та публікації, що дало змогу встановити складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями незалежних змінних на деякому інтервалі значень таблично-заданої функції. З'ясовано, що багатьма дослідниками розроблено потужний математичний апарат, який можна використовувати для розв'язання широкого кола задач як наукового, так і прикладного типу. Однак основна частка досліджень – це строга теорія чисельного диференціювання табличних функцій, тобто уточнення її фундаментальних математичних положень.

2. Наведено постановку задачі чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, із використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня від однієї, двох і багатьох незалежних змінних. Встановлено, що будь-яку таблично-задану функцію спочатку потрібно згладити деякою функцією, аналітичний вираз якої є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом, який отримано за МНК із деякою похибкою. Під похідною від такої таблично-заданої функції розуміють похідну від її інтерполянти. Некоректність процедури чисельного диференціювання таблично-заданих функцій в тому, що близькість дійсної та загладжуваної функцій не гарантує близькості їх похідних.

3. З'ясовано особливості чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, з використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня в довільно розташованих вузлах інтерполяції. Розроблено метод чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, сутність якого зводиться до добутку вектора-рядка Тейлора *n*-го степеня на матрицю *k*-го порядку його диференціювання ($k \le n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

4. Наведено деякі постановки задач чисельного диференціювання таблично-заданих функцій, із використанням многочлена Тейлора *n*-го степеня, відповідні алгоритми їх розв'язання та конкретні приклади реалізації. Встановлено, що для обчислення похідної *k*-го порядку від таблично-заданої функції за прийнятим значенням незалежної змінної $x = x'$ потрібно виконати такі дії: за даними таблиці сформувати матричне рівняння, розв'язати його та отримати значення коефіцієнтів інтерполянти; підставити у відповідний матричний вираз коефіцієнти інтерполянти та значення змінної $x = x'$ та виконати дії множення матриць, вказані у виразі.

5. Здійснено перевірку правильності виконання розрахунків, із використанням відповідних центральних різницевих формул. Встановлено, що обчислені похідні *k*-го порядку, з використанням формул центральних скінченних різниць, практично збігаються зі значеннями, отриманими за допомогою інтерполяційного многочлена Тейлора *n*-го степеня, тобто значення похідних обчислено правильно.

References

[1] Abinash Nayak. (2020). A new regularization approach for numerical differentiation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 28(13), 1747-1772. https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1763983

[2] Andrei D. Polyanin, & Alexander V. Manzhirov. (1998). Handbook of Integral Equations: Second Edition (Handbooks of Mathematical Equations). CRC Press, Boca Raton, 1142 p. URL: https://www.amazon.com/Handbook-Integral-Equations-Handbooks-Mathematical/dp/1584885076

[3] Andrunyk, V. A. (2019). *Numerical methods in computer sciences*. Lviv: New World-2000, Vol. 1, 470 p. [In Ukrainian.

[4] Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., & Pasichnyk V. V. (Ed.), et al. (2018). *Numerical methods in computer science: textbook*. Issue 2. Lviv: Novy svit-2000, 536 p. [In Ukrainian].

[5] Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., Pasichnyk, V. V., et al. (2018). *Numerical methods in computer science: textbook*. Edited by V. V. Pasichnyk. Lviv: New World-2000, Vol. 2, 536 p. [In Ukrainian].

[6] Bakhvalov, Ya. S., Zhidkov, I. L., & Kobelkov, G. M. (2002). *Numerical methods*. Moscow: Laboratory of basic knowledge, 632 p. [In Russian].

[7] Balashova, S. D. (1992). *Numerical methods: tutorial. In two parts*. Kyiv: NMK VO, Part 1, 280 p., Part 2, 328 p. [In Ukrainian].

[8] Bang Hu, & Shuai Lu. (2012). Numerical differentiation by a Tikhonov regularization method based on the discrete cosine transform. *Applicable Analysis*, 91(1), 719–736. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.598862

[9] Ben Adcock, Daan Huybrechs, & Jesús Martín-Vaquero. (2014). On the Numerical Stability of Fourier Extensions. *Foundations of Computational Mathematics*, 14, 635–687. https://doi.org/10.1007/s10208-013-9158-8

[10] Binbin Yin, & Yuzhang Ye. (2006). Recovering the local volatility in Black–Scholes model by numerical differentiation. *Applicable Analysis*, 85(6–7), 681–692. https://doi.org/10.1080/00036810500475025

[11] Boyko, L. T. (2009). *Fundamentals of numerical methods: a study guide*. Dnipropetrovsk: DNU Publishing House, 244 p. [In Ukrainian].

[12] Branovytska, S. V., Medvedev, R. B., & Fialkov, Y. Ya. (2004). *Computational mathematics and programming: textbook*. Kyiv: IOC Publishing House "Polytechnic", 220 p. [In Ukrainian].

[13] Cheng, J., Jia, X. Z., & Wang, Y. B. (2007). Numerical differentiation and its applications. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 15(1), 339-357. https://doi.org/10.1080/17415970600839093

[14] Chu-Li Fu, Xiao-Li Feng, Zhi Qian. (2010). Wavelets and high order numerical differentiation. *Applied Mathematical Modelling*, 34(11), 3008–3021. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.01.009

[15] Demkiv, I. I. (2013). Interpolation of nonlinear operators on a continuous set of nodes. *Abstract of Doctoral Dissertation for Candidate of Physics and Mathematics Sciences* (01.01.07 – Computational mathematics). Ihor Ivanovich Demkiv. Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 39 p. [In Ukrainian].

[16] Diego A. Murio. (1993). *The Mollification Method and Numerical Solution of Ill-posed Problems*. New York: John Wiely & Sons, 254 p. https://doi.org/10.1002/9781118033210

[17] Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). *Regularization of Inverse Problems. Mathematics and Its Applications*, 375, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8

[18] Esterby, O., & Zlatev, Z. (1987). *Direct methods of sparse matrices*. Translation by Hakim Ikramov. Moscow: Mir Publishing House, 118 p. [In Russian].

[19] Feldman, L. P. (2000). Numerical methods and mathematical packages. S*olving problems in the Machematica-3 package*. Donetsk: Donetsk GTU, 96 p. [In Russian].

[20] Feldman, L. P., Petrenko, A. I., & Dmytrieva, O. A. (2006). *Numerical methods in computer science: textbook*. Kyiv: BHV Publishing Group, 474 p. [In Ukrainian].

[21] Filts, R. V. (1994). Calculation of Taylor and Fourier polynomials and their derivatives. Synopsis of lectures on the subject "Mathematical problems of electromechanics" for students. special 1801 "Electromechanics". Lviv: State University "Lviv Polytechnic", 24 p. [In Ukrainian].

[22] Filts, R. V. (2010). *Equilibrium calculus: monograph*. Lviv: LDINTU named after Vyacheslav Chornovol, 184 p. [In Ukrainian].

[23] Filtz, R. V. (1994). Differentiation of tabular functions. Synopsis of lectures on the subject "Mathematical problems of electromechanics" for students of the specialty 1801 "Electromechanics". *Typescript edition of the "Electric Machines" department*. Lviv: State University "Lviv Polytechnic", 52 p. [In Ukrainian].

[24] Filz, R. V., Kotsyuba, M. V., & Hrytsiuk, Yu. I. (1991). Algorithm for computing the Taylor polynomial and its derivatives on a computer. *Izvestiya vuzov. Electromechanics*, No 5, 5–10. [In Russian].

[25] Goncharov, O. A., Vasylieva, L. V., & Yunda, A. M. (2020). *Numerical methods of solving applied problems: textbook*. Sumy: Sumy State University, 142 p. [In Ukrainian].

[26] Hanke M, Scherzer O. (1998). Error analysis of an equation error method for the identification of the diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic differential equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 59(3), 1012–1027. https://doi.org/10.1137/S0036139997331628

[27] Hanke, M., & Scherzer, O. (2001). *Inverse Problems* light: Numerical differentiation. American Mathematical Monthly, 108(6), 512–521. https://doi.org/10.2307/2695705

[28] Herbert Egger, & Heinz W. Engl. (2005). Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates. *Inverse Problems*, 21(3), 1027–1045. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/014

[29] Hrytsiuk, Yu. I. (2014). *Computational methods and models in scientific research: monograph*. Lviv: LSU BZD Publishing House. 288 p. [In Ukrainian].

[30] Hrytsiuk, Yu. I., & Havrysh, V. I. (2022). Interpolation of table-given functions by Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(1), 88–102. https://doi.org/10.36930/40320414

[31] Hrytsiuk, Yu. I., & Havrysh, V. I. (2022). Numerical differentiation of periodic tabular-specified functions using the Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(5), 69–79. https://doi.org/10.36930/40320410

[32] Hrytsiuk, Yu. I., & Tushnytskyy, R. B. (2022). Interpolation of tabular functions from one independent variable using the Taylor polynomial. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 4(2), 01–17. https://doi.org/10.23939/ujit2022.02.001

[33] Huilin Xu, & Jijun Liu. (2010). Stable numerical differentiation for the second order derivatives. *Advances in Computational Mathematics*, 33, 431–447. https://doi.org/10.1007/s10444-009-9132-9

[34] Jane Cullum. (1971). Numerical differentiation and regularization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 8(2), 254–265. https://doi.org/10.1137/0708026

[35] John P. Boyd. (2002). A Comparison of Numerical Algorithms for Fourier Extension of the First, Second, and Third Kinds. *Journal of Computational Physics*, 178(1), 118-160. https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7023

[36] Kopcha-Horyachkina, G. E. (2011). *Numerical methods in computer science: educational and methodological manual*, Part 1. Uzhgorod: Publishing House of Zakarpattia State University, 76 p. [In Ukrainian].

[37] Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Lisovenko, A. I. (2019). *Numerical Methods. Numerical integration of functions: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 74 p. [In Ukrainian].

[38] Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Prokopova, M. O. (2013). Computational mathematics. Interpolation and approximation of tabular data: tutorial. Vinnytsia: VNTU, 111 p. [In Ukrainian].

[39] Kvetny, R. N., & Bogach, I. V. (2003). Interpolation of the function of two variables according to the Lagrange method. *Bulletin of the Vinnytsia Polytechnic Institute*, No 6, 365–368.

[40] Leevan Ling. (2006). Finding Numerical Derivatives for Unstructured and Noisy Data by Multiscale Kernels. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1). https://doi.org/10.1137/050630246

[41] Lyon, M., Picard, J. (2014). The Fourier approximation of smooth but non-periodic functions from unevenly spaced data. *Advances in Computational Mathematics*, 40, 1073–1092. https://doi.org/10.1007/s10444-014-9342-7

[42] Makarov V. L., Demkiv I. I. (2012). Interpolating integral continued fractions that do not require the substitution rule. *Abstracts of the report in Kamianets-Podilsk*, May 28 – June 3, 2012. Kyiv, pp. 63–64. [In Ukrainian].

[43] Mamchuk, V. I. (2015). *Numerical methods: tutorial*. Kyiv: National Aviation University, 388 p. [In Ukrainian].

[44] Markus Hegland, & Robert S. Anderssen. (2005). Resolution enhancement of spectra using differentiation. *Inverse Problems*, 21, 915. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/008

[45] Martin Hanke, & Otmar Scherzer. (2001). Inverse Problems light: Numerical differentiation. *The American Mathematical*

Monthly, 108(6), 512–521. https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919778
[46] Murio, D. A., Mejia, C. E., & Zhan, S. (1998). Discrete mollification and automatic numerical differentiation. *Computers & Mathematics with Applications*, 35(5), 1–13. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)00001-7
[47] Ovchinnikov, P. F. (Ed.), Lisitsyn, B. M., & Mikhailenko, V. M. (1989). *Higher mathematics*. Kyiv: High school, 679 p. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Ovchin_P2_2004_792.pdf
[48] Pissanetzky, Sergio. (1988). *Sparse Matrix Technology*. Translation from English. Moscow: Mir Publishing House, 410 p. [In Russian].
[49] Qian, Z., Fu, C. L., Xiong, X. T., & Wei, T. (2006). Fourier truncation method for high order numerical derivatives. *Applied mathematics and computation*, 181(2), 940–948. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.01.057
[50] Ramm, A. G., & Smirnova, A. B. (2001). On stable numerical differentiation. *Mathematics of Computation*, Vol. 70, 1131–1153. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-01-01307-2
[51] Rodrigo B. Platte, Lloyd N. Trefethen, & Arno B. J. Kuijlaars. (2011). Impossibility of Fast Stable Approximation of Analytic Functions from Equispaced Samples. *SIAM Review*, 53(2), 308-318. URL: https://www.jstor.org/stable/23065166
[52] Rudolf Gorenflo, & Sergio Vessella. (1991). *Abel Integral Equations: Analysis and Applications. Lecture Notes in Mathematics*, 1461. Berlin: Springer, 1991st Edition, 232 p. URL: https://www.amazon.com/Abel-Integral-Equations-Applications-Mathematics/dp/354053668X
[53] Soyoung Ahn, U. JinChoi, & Alexander G. Ramm. (2006). A scheme for stable numerical differentiation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(2), 325-334. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.02.002
[54] Stanley R. Deans. (2007). *The Radon Transform and Some of Its Applications (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications; Illustrated edition, 304 p. URL: https://www.amazon.com/Radon-Transform-Applications-Dover-Mathematics/dp/0486462412
[55] Sviridenko, A. B. (2017). Direct multiplicative methods for sparse matrices. Newton methods. *Computer research and modeling*, Vol. 9 No. 5, 679−703. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-679-703
[56] Tsegelyk, H. G. (2004). *Numerical methods: textbook for students*. Lviv: Publishing House of the Lviv National University named after Ivan Franko, 407 p. [In Ukrainian].
[57] Tsegelyk, H. G. (2004). *Numerical methods: textbook for university students*. Lviv National University named after Ivan Franko. Lviv, 407 p. [In Ukrainian].
[58] Vasylyshyn, T. V., Goy, T. P., & Fedak, I. V. (2014). Integral equations: a study guide. Ivano-Frankivsk: Simyk, 222 p. URL: https://kmfa.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/64/2019/12/Василишин-Т.В.-Гой-Т.П.-Федак-І.В.-Інтегральні-рівняння.pdf
[59] Wan, X. Q., Wang, Y. B., & Yamamoto, M. (2006). Detection of irregular points by regularization in numerical differentiation and application to edge detection. *Inverse Problems*, 22(3), 1089. https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/3/022
[60] Wang, Y. B., & Wei, T. (2005). Numerical differentiation for two-dimensional scattered data. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 312(1), 121-137. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.025
[61] Wang, Y. B., Jia, X. Z., & Cheng, J. (2002). A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity. *Inverse Problems*, 18(6), 1461. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/6/301
[62] Wei, T., & Hon, Y. C. (2007). Numerical differentiation by radial basis functions approximation. *Advances in Computational Mathematics*, 27(3), 247–272. https://doi.org/10.1007/s10444-005-9001-0
[63] Wei, T., Hon, Y, C., & Wang, Y. B. (2005). Reconstruction of numerical derivatives from scattered noisy data. *Inverse Problems*, 21(2), 657–672. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/013
[64] Weidong Chen. (2021). Regularized derivative interpolation for two dimensional band-limited functions. *Signal Processing*, 184, 107943. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107943
[65] Xie, O., Zhao Z. Y. (2013). Numerical differentiation of 2d functions by a mollification method based on Legendre expansion. *International Journal of Computer Science,* Vol. 10(1), 729–734. URL: https://ijcsi.org/papers/IJCSI-10-1-2-729-734.pdf
[66] Yang, Lu. (2008). A perturbation method for numerical differentiation. *Applied mathematics and computation*, 199(1), 368–374. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.09.066
[67] Yong-Fu Zhang, & Chong-Jun Li. (2019). A class of multistep numerical difference schemes applied in inverse heat conduction problem with a control parameter. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 27(7), 887–942. https://doi.org/10.1080/17415977.2018.1501370
[68] Zewen Wang, & Rongsheng Wen (2010). Numerical differentiation for high orders by an integration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3), 941-948. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.056
[69] Zhenyu Zhao, & Zehong Meng. (2010). Numerical differentiation for periodic functions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 18(7), 957-969. https://doi.org/10.1080/17415977.2010.492517
[70] Zhenyu Zhao, Zehong Meng, & Guoqiang He. (2009). A new approach to numerical differentiation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 232(2), 227–239. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.06.001
[71] Zhenyu Zhao, Zehong Meng, Li Xu, & Junfeng Liu. (2009). A New Mollification Method for Numerical Differentiation of 2D Periodic Functions. *IEEE International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*, 24-26 April 2009, (pp. 205-207), Sanya, China. https://doi.org/10.1109/CSO.2009.174
[72] Zhenyu Zhao. (2010). A truncated Legendre spectral method for solving numerical differentiation. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(16), 3209–3217. https://doi.org/10.1080/00207160902974404
[73] Zygmund, Antoni (Author), Fefferman, Robert A. (Ed.). (2002).*Trigonometric series, I, II, Cambridge Mathematical Library* (3rd ed.). Cambridge University Press, 784 p. URL: https://www.amazon.com/Trigonometric-Cambridge-Mathematical-Library-Zygmund/dp/0521890535

Yu. I. Hrytsiuk, R. B. Tushnytskyy

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

NUMERICAL DIFFERENTIATION OF TABLE-GIVEN FUNCTIONS AT ARBITRARILY LOCATED INTERPOLATION NODES

A methodology has been developed for numerically differentiating table-given functions using a Taylor polynomial of degree n, which enables the computation of k-th order derivatives ($k \leq n$) at any point between arbitrarily located interpolation nodes in one, two, or multiple independent variables. Recent research and publications have been analysed, allowing for the assessment of the task complexity of computing derivatives of a function based on the values of independent variables within a certain interval of a table-given function. The formulation of the problem of numerical differentiation of periodic table-given functions using the Taylor polynomial of the nth order from one, two, and multiple independent variables is described. It is established that any tabulated function should be initially smoothed by some function whose analytical expression is a global (local) interpolating polynomial or a polynomial obtained by least squares approximation with some error. The derivative of such a table-given function is understood as the derivative of its interpolant. A method of numerical differentiation of table-given functions is developed, the essence of which is reduced to the product of the Taylor row vector of the n-th degree by the matrix of the k-th order of its differentiation ($k \leq n$) and on the column vector of the coefficients of the corresponding interpolant.

Some problem formulations of numerical differentiation of table-given functions using Taylor polynomials of degree n, corresponding solution algorithms, and specific implementation examples are provided. It has been established that to compute the k-th order derivative of a table-given function at a given value of the independent variable, the following steps need to be performed: based on the given table data, form a matrix equation, solve it to obtain the coefficients of the interpolant; substitute into the corresponding matrix expression the obtained interpolant coefficients and the independent variable value, and perform the matrix multiplication operations specified in the expression. The verification of the accuracy of the calculations using the appropriate central difference formulas was made. It was established that the calculated derivatives of the k-th order using the formulas of central finite differences practically coincide with the values obtained using the Taylor polynomial interpolation of the n-th order, that is, the values of the derivatives are calculated correctly.

Keywords: taylor polynomial, smoothing functions, interpolation of tabular functions, formulas of central finite differences, calculation of derivatives.

Інформація про авторів:

Грицюк Юрій Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.
Email: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua; https://orcid.org/0000-0001-8183-3466

Тушницький Руслан Богданович, канд. техн. наук, доцент, кафедра програмного забезпечення.
Email: ruslan.b.tushnytskyy@lpnu.ua; https://orcid.org/0000-0002-8522-0293

Цитування за ДСТУ: Грицюк Ю. І., Тушницький Р. Б. Чисельне диференціювання таблично-заданих функцій у довільно розташованих вузлах інтерполяції. *Український журнал інформаційних технологій.* 2023. Т. 5, № 1. С. 25–41.

Citation APA: Hrytsiuk, Yu. I., & Tushnytskyy, R. B. (2023). Numerical differentiation of table-given functions at arbitrarily located interpolation nodes. *Ukrainian Journal of Information Technology, 5*(1), 25–41. https://doi.org/10.23939/ujit2023.01.025